

3.1

(a)

Funktionensymbole:

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= x \circ y \\ g(x, y) &:= x \diamond y \end{aligned}$$

Relationen:

$$R(x, y) := (x = y)$$

Aus dieser Relation ergibt sich das Prädikat

$$P(x, y) := R(x, y)$$

und damit die prädikatenlogische Formel

$$\forall x \forall y \exists z P(g(f(x, y), z), f(y, x))$$

(b)

Wir operieren hier auf der Menge \mathbb{N} und können mittels der Relation

$$R := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl}\}$$

das Prädikat

$$P(x) = R(x)$$

und erhalten damit die prädikatenlogische Formel

$$\exists x P(x)$$

3.2

Sei P das Prädikat, welches R beschreibt, so, könnte man es folgendermaßen definieren:

$$\begin{aligned} P := \{ &((1, 1), 1), ((1, 2), 0), ((1, 3), 1), ((1, 4), 0), \\ &((2, 1), 0), ((2, 2), 1), ((2, 3), 0), ((2, 4), 1), \\ &((3, 1), 1), ((3, 2), 0), ((3, 3), 1), ((3, 4), 0), \\ &((4, 1), 0), ((4, 2), 1), ((4, 3), 0), ((4, 4), 1)\} \end{aligned}$$

3.3

(a)

Ein Modell, welches auf die Formel $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (P(x_1, x_2) \wedge P(x_3, x_2) \wedge P(x_1, x_3) \wedge \overline{P(x_3, x_1)})$ paßt, wäre folgendes:

$$\mathfrak{M} := (\mathfrak{F}(M); \subset),$$

wobei M eine willkürlich gewählte, nichtleere Menge sei.

(b)

Ein Modell für die Formel $(\forall x_1(P(x_1, x_2) \vee Q(x_2))) \Rightarrow (\forall x_2 Q(x_2))$ wäre beispielsweise folgendes:

$$\mathfrak{A} := (\mathbb{N}^+, <, \text{GrößerNull}),$$

mit $\text{GrößerNull}(x) := (x > 0)$.

3.4

Beispiele für Dinge, die sich nicht mit der PL₁ beschreiben lassen, wären:

- Es gibt ein Prädikat, für das gilt: es trifft auf alle natürlichen Zahlen zu.
- Für alle Prädikate gilt: es trifft auf alle natürlichen Zahlen zu.

3.5

(b)

α ist eine Folgerung aus β , da

(c)

β ist keine Folgerung aus α , da

(a)

α und β sind nicht äquivalent, da hierzu β eine Folgerung aus α sein müßte.