2.2

$u: F \to \{0,1\}$

$$
\begin{aligned}
&u(A) = u(B) = 1, \quad u(C) = 0,\\
&u\Big(\big((A \Rightarrow) \Rightarrow C\big)\Big) = 0\\
&u(\varphi) = 0 \quad \text{für alle anderen } \varphi
\end{aligned}
$$

Für eine Bewertungsfunktion muss nun folgendes gelten:

$$\forall f, g, h \in F:$$

$$
\begin{gathered}
u(\neg f) = \neg u(f)\\
u(g \vee h) = u(g) \vee u(h)\\
u(g \wedge h) = u(g) \wedge u(h)\\
u(g \Rightarrow h) = u(g) \Rightarrow u(h)
\end{gathered}
$$

Hier ist durch obige Festlegungen schon $u(\neg f) = \neg u(f)$ unmöglich. $u(C) = 0$, daraus muss folgen, dass $u(\neg C) = \neg u(C) = 1$, was aber der Festlegung $u(\varphi) = 0$ für alle anderen φ widerspricht.

2.3

(a)

Eine Schlussfolgerung wäre B, beweisbar folgendermaßen:

$$\frac{[\text{A7}] \quad \text{M.p.} \quad \dfrac{(A \wedge B) \wedge C, \quad (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha}{A \wedge B}, \quad (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \beta}{B} \quad \text{M.p.} \quad [\text{A7}]$$

(b)

Eine Schlussfolgerung wäre C, beweisbar folgendermaßen:

$$[\text{A7}] \quad \text{M.p.} \quad \frac{(A \wedge B) \wedge C, \quad (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \beta}{C}$$

2.4

(b) Kontraposition

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \quad (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\bar{\beta} \Rightarrow \bar{\alpha})}{\bar{\beta} \Rightarrow \bar{\alpha}} \quad \text{M.p.} \quad [\text{A11}]$$

(a) Modus tollens

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\bar{\beta} \Rightarrow \bar{\alpha}} \quad \text{Kontraposition}$$

$$\frac{\bar{\beta}, \quad \bar{\beta} \Rightarrow \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} \quad \text{M.p.}$$

(c) Kettenschluss

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \quad (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \big((\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\big)}{\big((\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\big)} \quad \text{M.p.} \quad [\text{A3}]$$

$$\frac{\beta \Rightarrow \gamma, \quad (\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)}{\alpha \Rightarrow \gamma} \quad \text{M.p.}$$

2.5

Hinweis: Aus Platzgründen verwende ich hier die Schreibweise $A\bar{B}C$ für die Menge $\{A, \bar{B}, C\}$ (analog für andere Mengen ebenfalls; von $\emptyset$ mal abgesehen, da dies *nicht* $\{\emptyset\}$ bedeuten soll).

$$\begin{aligned}
\Sigma &:= \{A\bar{B}C, BC, \bar{A}C, B\bar{C}, \bar{C}\} \\
\mathrm{Res}_1(\Sigma) &= \{AC, \bar{B}C, AC\bar{C}, AB\bar{B}, A\bar{B}, B, \bar{A}B, \bar{A}\} \cup \Sigma \\
\mathrm{Res}_2(\Sigma) &= \{B\bar{B}C, A\bar{A}C, \bar{B}C, C, ABC, C\bar{C}, B\bar{B}, A, \bar{B}, A\bar{C}, A\bar{B}\bar{C}, BC\bar{C}, AB, A\bar{A}\} \cup \mathrm{Res}_1(\Sigma) \\
\mathrm{Res}_3(\Sigma) &= \{AB\bar{B}C, \bar{B}C\bar{C}, A\bar{A}\bar{B}, \bar{A}BC, A\bar{A}B, \emptyset, AB\bar{C}, ABC\bar{C}, B\bar{B}\bar{C}, A\bar{A}\bar{C}, \bar{B}\bar{C}, A\bar{B}C\bar{C}, A\bar{A}BC, AB\bar{B}\bar{C}\} \cup \mathrm{Res}_2(\Sigma)
\end{aligned}$$

2.6

$$\varphi = (\bar{B} \wedge \bar{C} \wedge D) \vee (\bar{B} \wedge \bar{D}) \vee (C \wedge D) \vee B$$

Um den Resolutionsalgorithmus anwenden zu können, muss ich daraus zunächst eine KNF machen. Eine Wertetabelle würde einem jedoch gleich sagen, dass es eine Tautologie ist, also behelfe ich mir mit einem kleinen Trick:

$$\varphi = \bar{\bar{\varphi}} = \overline{(B \vee C \vee \bar{D}) \wedge (B \vee D) \wedge (\bar{C} \vee \bar{D}) \wedge \bar{B}} =: \bar{\hat{\varphi}}$$

Nun ist der Teil unter dem *Nicht* eine KNF, auf der man Resolution anwenden kann:

$$\hat{\varphi} = \big\{\{B, C, \bar{D}\}, \{B, D\}, \{\bar{C}, \bar{D}\}, \{\bar{B}\}\big\}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_1 &= \big\{\{B, C, \bar{D}\}, \{B, D\}, \{\bar{C}, \bar{D}\}, \{\bar{B}\}, \{B, C\}, \{B, \bar{D}\}, \{C, \bar{D}\}, \{B, \bar{C}\}, \{D\}\big\} \\
\mathrm{Res}_2 &= \big\{\{B, C, \bar{D}\}, \{B, D\}, \{\bar{C}, \bar{D}\}, \{\bar{B}\}, \{B, C\}, \{B, \bar{D}\}, \{C, \bar{D}\}, \{B, \bar{C}\}, \{D\}, \{B\}, \dots\big\}
\end{aligned}$$

Ich habe hier aufgehört, da es mir gelungen ist, ein $\{B\}$ zu resolvieren. Im nachfolgenden Resolutionsschritt würde demzufolge Res_3 eine leere Menge aufgrund der Resolution von $\{\bar{B}\}$ und $\{B\}$ entstehen, womit $\hat{\varphi}$ nach Satz 2.8.5 nicht erfüllbar und damit widerspruchsvoll ist. Daraus folgt, da $\varphi = \bar{\hat{\varphi}}$, dass φ eine Tautologie ist, da die Negation einer unerfüllbar Formel (in der für alle Belegungen u gilt, dass $u(\varphi) = 0$) eine Tautologie ergibt (in der für alle Belegungen u gilt, dass $u(\varphi) = 1$).

2.7

$\varphi := (\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{D}) \wedge \bar{E} \wedge (\bar{C} \vee A) \wedge C \wedge B \wedge (\bar{G} \vee D) \wedge G$

	$\varphi = A$	$\wedge B$	$\wedge D \Rightarrow 0,$	$E \Rightarrow 0,$	C	$\Rightarrow A,$	$1 \Rightarrow C,$	$1 \Rightarrow B,$	G	$\Rightarrow D,$	$1 \Rightarrow G$
1.							•	•			•
2.		•			•				•		
3.						•				•	
4.	•		•								

unerfüllbar, da A, B, D jeweils mit 1 belegt werden müssen … daraus kann aber nicht 0 folgen.