1.1

(A)

$$
\begin{aligned}
\overline{(\bar{x} \wedge y) \vee (z \wedge x)} \vee \bar{y} &= \left(\overline{(\bar{x} \wedge y)} \wedge \overline{(z \wedge x)}\right) \vee \bar{y} \\
&= \left((x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{z} \vee \bar{x})\right) \vee \bar{y} \\
&= \left((x \vee \bar{y}) \vee \bar{y}\right) \wedge \left((\bar{z} \vee \bar{x}) \vee \bar{y}\right) \\
&= (x \vee \bar{y} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \\
&= (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \\
&= (x \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge \bar{y}) \\
&= \left(\bar{z} \wedge (x \vee \bar{y})\right) \vee \left(\bar{y} \wedge (\bar{x} \vee x)\right) \\
&= \left(\bar{z} \wedge (x \vee \bar{y})\right) \vee \bar{y} \\
&= (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{y}) \\
&= (\bar{y} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z})
\end{aligned}
$$

■

(B)

$$\overline{x \vee y \vee \bar{z}} \leq \bar{y} \wedge z \Leftrightarrow \overline{x \vee y \vee \bar{z}} \vee (\bar{y} \wedge z) = \bar{y} \wedge z$$

$$
\begin{aligned}
\overline{x \vee y \vee \bar{z}} \vee (\bar{y} \wedge z) &= \left(\bar{x} \wedge (\bar{y} \wedge z)\right) \vee (\bar{y} \wedge z) \\
&\overset{\text{Abs.}}{=} \bar{y} \wedge z
\end{aligned}
$$

■

1.2

$B \coloneqq \{0, 1, a, \bar{a}\}, \qquad \underline{B} \coloneqq (B; \vee, \wedge, {}^{-}, 0, 1)$

$\vee$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{a}$	$\bar{\boldsymbol{a}}$
$\mathbf{0}$	0	1	a	$\bar{a}$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1
$\boldsymbol{a}$	a	1	a	1
$\bar{\boldsymbol{a}}$	$\bar{a}$	1	1	$\bar{a}$

$\wedge$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{a}$	$\bar{\boldsymbol{a}}$
$\mathbf{0}$	0	0	0	0
$\mathbf{1}$	0	1	a	$\bar{a}$
$\boldsymbol{a}$	0	a	a	0
$\bar{\boldsymbol{a}}$	0	$\bar{a}$	0	$\bar{a}$

$\boldsymbol{x}$	$\bar{\boldsymbol{x}}$
0	1
1	0
a	$\bar{a}$
a	a

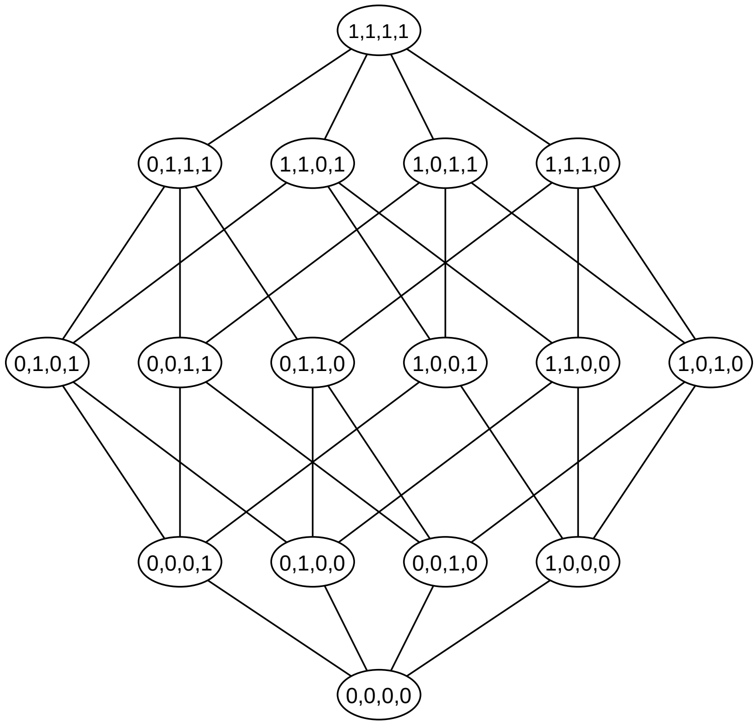
$R^{\otimes} \coloneqq (B;\ +, \cdot, -, 0, 1)$

$+$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{a}$	$\bar{\boldsymbol{a}}$
$\mathbf{0}$	0	1	a	$\bar{a}$
$\mathbf{1}$	1	0	$\bar{a}$	a
$\boldsymbol{a}$	a	$\bar{a}$	0	1
$\bar{\boldsymbol{a}}$	$\bar{a}$	a	1	0

$\cdot$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{a}$	$\bar{\boldsymbol{a}}$
$\mathbf{0}$	0	0	0	0
$\mathbf{1}$	0	1	a	$\bar{a}$
$\boldsymbol{a}$	0	a	a	0
$\bar{\boldsymbol{a}}$	0	$\bar{a}$	0	$\bar{a}$

$\boldsymbol{x}$	$-\boldsymbol{x}$
0	0
1	1
a	a
a	$\bar{a}$

1.3



1.4

Die Kardinalität des Ideals kann $2^k, k \leq 4$ betragen. Nehmen wir uns das Hasse-Diagramm der Algebra als gerichteten Graphen, wobei die Pfeil in Richtung des jeweils einschließenden Elementes zeigen. Jedes Ideal besitzt ein größtes Element sowie 0 als kleinstes (siehe 1.6). Aus (I_3) folgend, muss das Ideal sämtliche Knoten auf einem Pfad von 0 bis zum jeweiligen größten Element von I enthalten. Wie leicht zu sehen oder auszuzählen ist, beinhalten diese Pfade je nach „Ebene" des größten Elements in der Darstellung eine Zweierpotenz als Anzahl von Knoten.

1.5

Da $\{0\}$ ein Ideal ist, jedoch die Trägermenge einer Booleschen Algebra mindestens zweielementig, gilt es nicht, dass ein Ideal immer die Trägermenge einer Booleschen Algebra ist.

1.6

Aus der Halbordnung und ihrer Transitivität sowie der Endlichkeit der Algebra (und damit ihrer Ideale), daß es sowohl ein kleinstens als auch ein größtes Element geben muß.

1.7

Die Ultrafilter der obigen Algebra sind:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(1,1,1,1)\} \\
U_2 &= \{(0,1,0,0),(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,1,1,0),(1,1,0,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\} \\
U_3 &= \{(0,0,1,0),(1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,1,1,0),(1,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\} \\
U_4 &= \{(0,0,0,1),(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\}
\end{aligned}
$$