1.

Definieren wir den Menge der Kette rekursiv:

$$M_0 \coloneqq \{0\}$$
$$M_{i+1} \coloneqq M_i \cup \{i+1\}$$

so wird deutlich, dass M_{i+1} immer eine Obermenge von M_i darstellt und somit $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ eine Kette ist. Weiterhin durchläuft die Menge mit ihrer Kardinalität jede natürliche Zahl[1] und demzufolge ist die kleinste obere Schranke unendlich, folglich existiert diese Schranke nicht in $\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$.

ZUSATZAUFGABE

Die Halbordnung können wir folgendermaßen definieren:

$$\preccurlyeq \coloneqq \{([a,b],[c,d]) | a,b,c,d \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty,\infty\}, c \leq a \wedge b \leq d\}, \cup \left\{(\imath,[a,b]) \middle| a,b \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty,\infty\}\right\} \cup \{(\imath,\imath)\}$$

wobei $\forall a \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}: -\infty \leq a$ und $\forall a \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}: a \leq \infty$.

Nach obigen Definitionen ist $\imath$, das „leere“ Intervall, das globale Minimum, da für jedes andere Intervall I gilt: $\imath \preccurlyeq I$.

[1] In der Definition von $\mathbb{N}$ nach DIN 5473