1.

(A)

Da die Zufallsvariable gleichverteilt im Intervall $[-1,1]$ ist, gilt $\mu = EX = m = 0$.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,X^2) &= E(X-\mu)(X^2-\mu) = E(X\cdot X^2) - EX\cdot E(X^2)\\ &= \underbrace{E(X^3)}_{0} - 0\\ &= 0\end{aligned}$$

2.

$$EX_i = 0, V(X_i) = 1, \qquad i \in \{1,2\}$$

$$\begin{aligned}X &= X_1 + 2X_2\\ Y &= X_1 + X_2 + 3\end{aligned}$$

Nach den Gesetzmäßigkeiten der Kovarianz ergibt sich für selbige

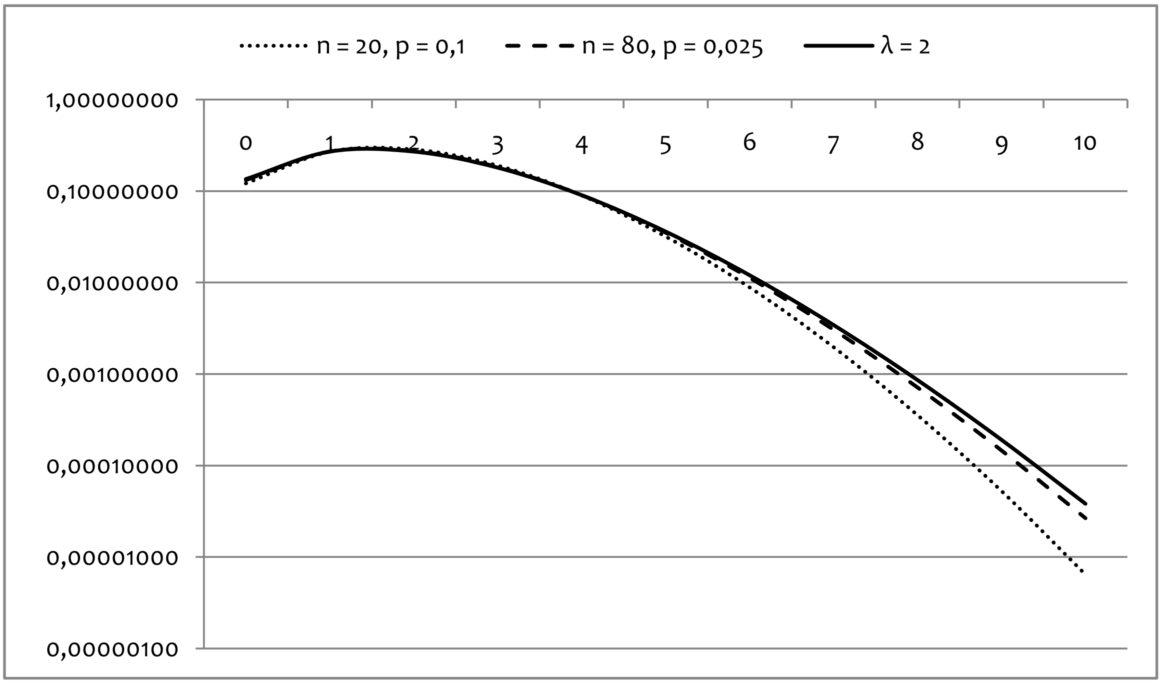
$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \operatorname{cov}(X_1+2X_2, X_1+X_2+3)\\ &= \underbrace{\operatorname{cov}(X_1,X_1)}_{V(X_1)} + \operatorname{cov}(X_1,X_2) + \underbrace{\operatorname{cov}(X_1,3)}_{0} + 2\underbrace{\operatorname{cov}(X_2,X_1)}_{\operatorname{cov}(X_1,X_2)} + 2\underbrace{\operatorname{cov}(X_2,X_2)}_{V(X_2)} + 2\underbrace{\operatorname{cov}(X_2,3)}_{0}\\ &= 3 + 3\operatorname{cov}(X_1,X_2)\\ &= 3 + 3\cdot(E(X_1\cdot X_2) - EX_1\cdot EX_2)\\ &= 3 + 3\cdot(0-0) = 3\end{aligned}$$

Die Korrelation ϱ ergibt sich dann durch

$$\begin{aligned}\varrho_{X,Y} &= \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\\ &=\end{aligned}$$

3.

k	$b_{n,p}(k)$ $n = 20, p = 0{,}1$	π_λ $\lambda = 2$	$b_{n,p}(k)$ $n = 80, p = 0{,}025$
0	0,121576655	0,135335283	0,000218475
1	0,270170344	0,2706706	0,270641652
2	0,285179807	0,2706706	0,274111417
3	0,190119871	0,180447	0,182740945
4	0,089778828	0,0902235	0,090199056
5	0,031921361	0,0360894	0,035154504
6	0,008867045	0,0120298	0,011267469
7	0,001970454	0,0034371	0,003054186
8	0,000355776	0,0008593	0,000714601
9	$5{,}27076 \cdot 10^{-05}$	0,0001909	0,000146585
10	$6{,}44204 \cdot 10^{-06}$	$3{,}819 \cdot 10^{-05}$	$2{,}6686 \cdot 10^{-05}$



Ich habe hier zur Veranschaulichung die vertikale Achse logarithmisch skaliert. Hier wird deutlich, dass die Abweichung der Poissonverteilung (die hier für beide Binomialverteilungen identisch ist), für große n bei der Binomialverteilung deutlich geringer wird. Dies ist auch nicht weiter verwunderlich, stellt die Poissonverteilung doch den Grenzwert der Binomialverteilung für $n \to \infty$ dar.

4.

Eine exponentialverteilte Zufallsgröße hat die Dichte

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Der Erwartungswert ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} \, dt = \int_{0}^{\infty} \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{\lambda e^{-\lambda t}}_{v'} \, dt, \qquad v = F_X = 1 - e^{-\lambda t} \\ &= \left(\left(1 - e^{-\lambda t}\right) \cdot t\right)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1 - e^{-\lambda t} \, dt \\ &= \left(t - te^{-\lambda t} - t - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right)\Big|_0^{\infty} \\ &= \left(-te^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right)\Big|_0^{\infty} \\ &= \left(-e^{-\lambda t} \cdot \frac{t+1}{\lambda}\right)\Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Die Varianz dann:

$$\begin{aligned}
V(X) &= E((X - EX)^2) \\
&= \int_0^\infty \left(t - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot \lambda e^{-\lambda t} \, dt \\
&= \int_0^\infty \left(\lambda t^2 - 2t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \, dt \\
&= \lambda \int_0^\infty t^2 e^{-\lambda t} \, dt - 2 \int_0^\infty t e^{-\lambda t} \, dt + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$