1.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{8} x_i p_i = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}005 + \frac{3}{2} \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}25 + \frac{5}{2} \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}1 + \frac{7}{2} \cdot 0{,}005 + 4 \cdot 0{,}1 = \frac{9}{4} = 2{,}25$$
$$V(X) = \sum_{i=1}^{8} \left(x_i - E(X)\right)^2 \cdot p_i = \frac{73}{80} = 0{,}9125$$

2.

$$p_{ij} = P(X = i, Y = j) = \frac{1}{36}$$

Damit ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für $X \cdot Y$ folgendermaßen:

$x_i \cdot y_i$	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x_i \cdot y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Folglich ist der Erwartungswert

$$E(X \cdot Y) = \frac{49}{4} = 12{,}25$$

Alternativ sind die beiden Ereignisse unabhängig, damit gilt:

$$E(X \cdot Y) = EX \cdot EY = EX^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

3.

Aus den gegebenen Daten kann man folgendes ableiten:

$$E(X) = \int_a^b \frac{t}{b-a}\, dt = \frac{1}{2(b-a)} \cdot (b^2 - a^2) = 5$$
$$5 = \frac{a+b}{2}$$
$$a = 10 - b$$

$$\begin{aligned}
\frac{25}{12} = V(X) &= \frac{1}{12}(b-a)^2 \\
&= \frac{1}{12}\left(b - (10 - b)\right)^2 \\
&= \frac{1}{12}(4b^2 - 40b + 100) \\
\frac{25}{4} &= b^2 - 10b + 25
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die beiden möglichen Lösungen für b:

$$b_1 = \frac{5}{2}, \qquad b_2 = \frac{15}{2}$$

Und damit zwei mögliche Werte für a:

$$a_1 = \frac{15}{2}, \qquad a_2 = \frac{5}{2}$$

Folglich ist das Intervall für die Gleichverteilung [2,5; 7,5]. Wir haben also folgende Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 2{,}5 \\ \frac{1}{5} & \text{für } 2{,}5 < t < 7{,}5 \\ 0 & \text{für } t \geq 7{,}5 \end{cases}$$

Und die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 2{,}5 \\ \frac{t - 2{,}5}{5} & \text{für } 2{,}5 < t < 7{,}5 \\ 1 & \text{für } t \geq 7{,}5 \end{cases}$$

Damit können wir die Teilaufgaben lösen:

a) $P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F(6) = 0{,}3$
b) $P(1 \leq X < 9) = F(9) - F(1) = 1 - 0 = 1$
c) $P(2 \leq X \leq 12) = F(12) - F(2) = 1 - 0 = 1$

4.

X hat hier eine 0-1-Verteilung. Damit ist der Erwartungswert $EX_i = p = 0{,}3$. $Y = \sum_{i=1}^{1000} X_i$. Nach Vorlesung gilt:

$$EY = \sum_{i=1}^{1000} X_i = 1000p = 300.$$

5.

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,k!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^{l} (1-p)^{(n-1)-l} \\ &= np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{m}{l} p^{l} (1-p)^{m-l} \\ &= np \end{aligned}$$

6.

Wir können davon ausgehen, dass die erste Person im Intervall $[12, 13]$ eintrifft. Die beiden Freunde treffen sich, wenn die zweite Person im Intervall $\left[X_1 - \frac{1}{6}, X_2 + \frac{1}{6}\right]$ eintrifft.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist für beide X (wenn wir in Stunden rechnen):

$$f_{X_i} = 1$$

$$\begin{aligned}
p &= \int_{12}^{13} \left(\int_{v-\frac{1}{6}}^{v+\frac{1}{6}} 1 \, du \right) dv \\
&= \int_{12}^{13} \left(v + \frac{1}{6}\right) - \left(v - \frac{1}{6}\right) dv = \int_{12}^{13} \frac{1}{3} \, dv \\
&= \frac{1}{3} \cdot 13 - \frac{1}{3} \cdot 12 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$