

1.

Wir haben die unabhängigen Zufallsvariable X_1 und X_2 , folglich gilt für $i \in \{1, 2\}$:

$$P(X_i = k) = \frac{\lambda_i}{k!} \cdot e^{-\lambda_i}$$

Nehmen wir uns nun die Faltungsformel:

$$r_k = \sum_{i=0}^k p_i q_{k-i}$$

So ergibt sich:

$$\begin{aligned} r_k &= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i}{i!} \cdot e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} \cdot e^{-\lambda_2} \\ &= e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2} \cdot \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i}{i!} \cdot \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i}{i!} \cdot \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= \frac{1}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot \lambda_1^i \cdot \lambda_2^{k-i} \\ &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich wieder eine Poissonverteilung mit dem Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$.

2.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Flugzeug „überevull“ wird, ist die Wahrscheinlichkeit, dass 101, 102 oder 103 Passagiere ihren Flug antreten würde. Folglich:

$$\begin{aligned} p &= 0,99 \\ n &= 103 \\ P(X \geq 101) &= \sum_{i=101}^{103} b_{n,p}(i) \approx 0,91502558229954134 \end{aligned}$$

Die Poissonverteilung liefert uns hier allerdings (da es nur eine Näherung ist)

$$P(X \geq 101) \approx 0,914098$$

3.

Die beiden Bauteile X_1 und X_2 haben folgende Dichten:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(t) &= \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{-t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \\ f_{X_2}(t) &= \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 2e^{-2t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $U := \min(X_1, X_2)$

$$F_U(t) = 1 - 3e^{-3t}$$

Sowie für $V := \max(X_1, X_2)$

$$F_V(t) = (1 - e^{-t})(1 - 2^{-2t}) = e^{-3t}(-1 + e^t)(-2 + e^{2t})$$

Somit ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

- a) $p = 1 - F_U(1,5) = 1 - (1 - 3e^{-4,5}) = 3e^{-4,5} \approx 0,0333$
 b) $p = 1 - F_V(1,5) = 1 - e^{-4,5}(-1 + e^{1,5})(-2 + e^3) \approx 0,3005$

4.

Der Median $x_{\frac{1}{2}}$ ist mit 100 gegeben. Damit gilt:

$$\frac{1}{2} = F_X(100) = 1 - e^{-100\lambda}$$

Folglich ergibt sich λ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 1 - e^{-100\lambda} \\ \frac{1}{2} &= e^{-100\lambda} \\ -\ln 2 &= -100\lambda \\ \lambda &= \frac{\ln 2}{100} \approx 0,006931 \end{aligned}$$

Damit ist

$$P(X < 150) = F_X(150) = 1 - e^{-\frac{150 \ln 2}{100}} \approx 0,6464466$$

Folglich sind ungefähr 0,65 des Materials nach 150 a zerfallen.

5.

Dichtefunktion:

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ te^{-t} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

a) Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \int_{-\infty}^t f_T(s) ds \\ &= \int_0^t \underbrace{s}_{u} \underbrace{e^{-s}}_{v'} ds \\ &= \underbrace{-se^{-s}}_{uv} \Big|_0^t - \int_0^t \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{(-e^{-s})}_{v} ds \\ &= -te^{-t} - (e^{-s}) \Big|_0^t \\ &= -te^{-t} - (e^{-t} - 1) \\ &= 1 - e^{-t}(t + 1) \\ \Rightarrow F_T(t) &= \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 - e^{-t}(t + 1) & \text{für } t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Median:

$$\frac{1}{2} = F_T(m)$$

Dies lässt sich mit Näherungsverfahren zu $m \approx 1,67835$ lösen.

b) Der Ausfall erfolgt vor dem Zeitpunkt 1:

$$P(T < 1) = F_T(1) \approx 0,2642$$

Der Ausfall erfolgt nach dem Zeitpunkt 5:

$$P(T > 5) = 1 - F_T(5) \approx 0,0404$$

Der Ausfall erfolgt zwischen den Zeitpunkten 0,5 und 2,5:

$$P(0,5 \leq T < 2,5) = F_T(2,5) - F_T(0,5) \approx 0,7127 - 0,0902 \approx 0,6225$$

- c) Die Wahrscheinlichkeit ist hiermit das Gegenereignis dazu, dass beide Bauelemente ausfallen:

$$(1 - P(T < 0,5))^2 \approx 0,8277$$