

1.

Um das  $c$  zu bestimmen, müssen wir folgende Gleichung lösen:

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt \\
 &= c \cdot \int_0^1 t^3(1-t)^2 dt \\
 \frac{1}{c} &= \int_0^1 t^3 - 2t^4 + t^5 dt \\
 &= \left. \frac{t^4}{4} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^6}{6} \right|_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \\
 &= \frac{1}{60}
 \end{aligned}$$

Damit ist  $c = 60$ .

$$\begin{aligned}
 F_X(t) &= \int_0^t f_X(s) ds \\
 &= 15t^4 - 24t^5 + 10t^6 \\
 P\left(\frac{1}{4} \leq X < \frac{3}{4}\right) &= F_X\left(\frac{3}{4}\right) - F_X\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{203}{256}
 \end{aligned}$$

Auf zum Median:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} &= F_X(m) = 15m^4 - 24m^5 + 10m^6 \\
 0 &= 10m^6 - 24m^5 + 15m^4 - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Hierdurch ergibt sich

$$m \approx 0,57859$$

Als einzige Lösung im Intervall  $[0, 1]$ .

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq X < a + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right) - F_X(a)$$

Nach Grenzwertübergang ergibt sich dann

$$F_X(a) - \lim_{n \rightarrow \infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right) = 0$$

3.

Behauptung:

$$P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} P(a \leq X < b) &= P(a < X < b) - P(X = a) \\ P(a \leq X \leq b) &= P(a < X < b) - P(X = a) + P(X = b) \\ P(a < X \leq b) &= P(a < X < b) + P(X = b) \end{aligned}$$

Wie wir in 2. schon nachgewiesen haben, ist  $P(X = a) = 0$ , folglich unterscheiden sich obige Terme nicht, zumindest für stetige Zufallsvariable.

Bei diskreten Zufallsvariablen gilt diese Behauptung nicht, wie im Folgenden für Würfeln mit 1W6 gezeigt werden kann:

Sei  $a = 3$  und  $b = 4$ , so ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(a \leq X < b) &= P(X = 3) &&= \frac{1}{6} \\ P(a \leq X \leq b) &= P(X = 3) + P(X = 4) &&= \frac{1}{3} \\ P(a < X \leq b) &= P(X = 4) &&= \frac{1}{6} \\ P(a < X < b) &&&= 0 \end{aligned}$$

Folglich ist die Behauptung für diskrete Zufallsvariable nicht anwendbar.

4.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Exponentialverteilung ist

$$f_X(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Was uns in diesem Falle auf die folgende Dichte führt:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Median einer Exponentialverteilung findet sich bei  $\tilde{x} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ , also ergibt sich hier der Median  $\tilde{x} = \frac{\ln 2}{3} \approx 0,2310$ .

Berechnen wir nun aus der Dichte zunächst die Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t 3e^{-3s} ds = \int_0^t 3e^{-3s} ds = -e^{-3s} \Big|_0^t = \begin{cases} 1 - e^{-3t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Damit können wir nun die beiden restlichen Teilaufgaben berechnen:

- $P(X \geq 1,5) = 1 - P(X < 1,5) = 1 - F_X(1,5) \approx 0,0111$
- $P(X < 2) = F_X(2) \approx 0,9975$

5.

Wir haben hier wieder eine Exponentialverteilung, diesmal mit dem Parameter  $\lambda = 0,5$ . Daraus ergeben sich die Dichte und Verteilungsfunktion:

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit

$$p = P(X_i < 1,5) = F_X(1,5) \approx 0,5276$$

Damit können wir die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Maschinen ausfallen, errechnen:

$$P = 1 - (b_{10,p}(1) + b_{10,p}(0)) \approx 0,9933$$