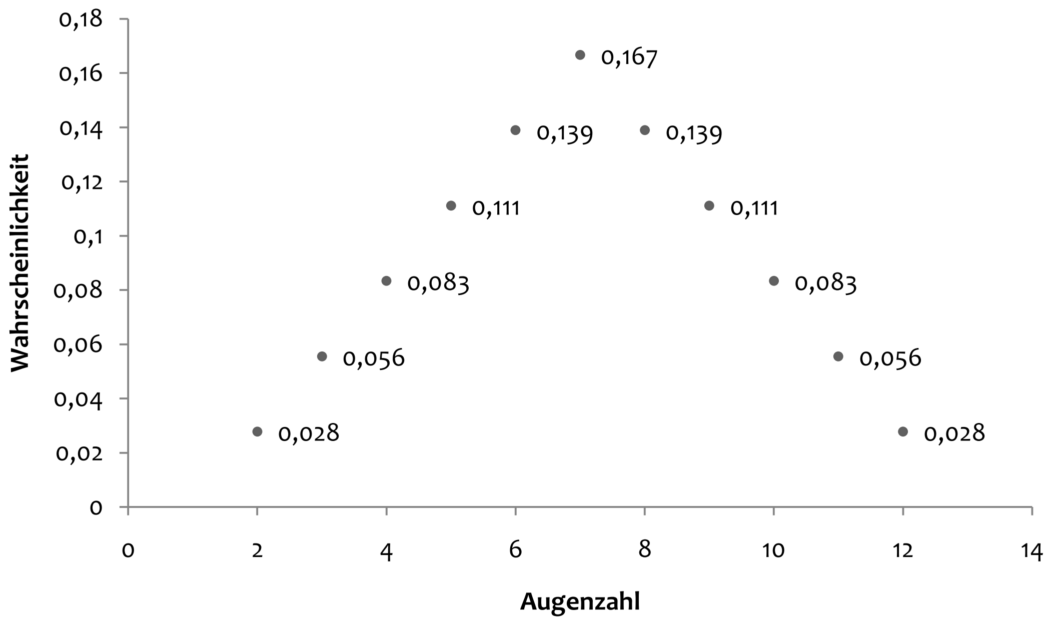
1.

Verteilungstabelle:

Augenzahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Funktion in hübsch gezeich^H^H^H^H^Hplottet:



2.

Dichtefunktion:

$$f_X := \begin{cases} c \cdot e^{-2t}, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Zunächst ermitteln wir aus der Dichtefunktion die Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{t} f_X(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{t} c \cdot e^{-2x}\,dx \\ &= \frac{c - c \cdot e^{-2t}}{2} \end{aligned}$$

Da wir wissen, dass

$$\lim_{t \to \infty} F_X(t) = 1$$

können wir damit c berechnen:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{c - c \cdot e^{-2t}}{2} = \frac{c}{2} = 1$$

Folglich gilt $c = 2$, was uns auf die endgültige Funktion $F_X(t)$ bringt:

$$F_X(t) = 1 - e^{-2t}$$

Demnach ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $P(1 \leq X < 4)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} P(1 \leq X < 4) &= F_X(4) - F_X(1) \\ &= e^{-8} \cdot (e^6 - 1) \approx 0{,}1350 \end{aligned}$$

3.

Zunächst bestimmen wir wieder die Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$F_X(t) = \int_0^t \frac{1}{\theta} \, ds = \frac{t}{\theta}$$

Weiterhin wissen wir:

$$P(1 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(1) = 0{,}25$$

$$0{,}25 = \frac{2}{\theta} - \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta}$$

$$\Rightarrow \theta = 4$$

Damit können wir nun $P(0 \leq X \leq 3)$ berechnen:

$$P(0 \leq X \leq 3) = F_X(3) - F_X(0) = \frac{3}{4}$$

4.

Unter der Annahme, dass der zufällige Vektor (X, Y) stetig ist, lassen sich die Aufgaben folgendermaßen lösen:

a) $P(X < a, c \leq Y < d) = F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(a, c)$

$$\begin{aligned} P(X < a, c \leq Y < d) &= \int_c^d \left(\int_{-\infty}^a f_{X,Y}(u, v) \, du \right) dv \\ &= \int_c^d \left(F_{X,Y}(a, v) \right) dv \\ &= F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(a, c) \end{aligned}$$

Wie wir sehen, landen wir beim gleichen Ergebnis.

b) $P(a \leq X < b, c \leq Y < d) = F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c) + F_{X,Y}(a, c)$

$$\begin{aligned} P(a \leq X < b, c \leq Y < d) &= \int_c^d \left(\int_a^b f_{X,Y}(u, v) \, du \right) dv \\ &= \int_c^d \left(F_{X,Y}(b, v) - F_{X,Y}(a, v) \right) dv \\ &= F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c) + F_{X,Y}(a, c) \end{aligned}$$

5.

Zunächst müssen wir wieder integrieren:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-s}\, ds \\ &= \int_{0}^{t} e^{-s}\, ds \\ &= 1 - e^{-t} \end{aligned}$$

Weiterhin ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil unbrauchbar ist

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - F_X(2) + \text{„}F_X(-\infty)\text{“} \\ &= 1 - F_X(2) \\ &= e^{-2} \approx 0{,}1353 \end{aligned}$$

Folglich kann man die Wahrscheinlichkeit, dass von 20 Bauteilen mindestens 3 unbrauchbar sind, wie folgt errechnen:

$$\begin{aligned} p(\text{mind. 3 Bauteile unbrauchbar}) &= 1 - p(\text{höchstens 2 Bauteile sind unbrauchbar}) \\ &= 1 - \left(\left(P(X > 2)\right)^2 \cdot \left(P(X \leq 2)\right)^{18} + \left(P(X > 2)\right) \cdot \left(P(X \leq 2)\right)^{19} + \left(P(X \leq 2)\right)^{20}\right) \\ &\approx 0.93555 \end{aligned}$$