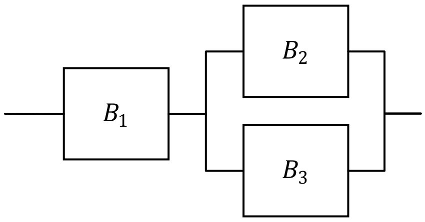
1.

Da ich keinen wirklichen Zusammenhang zwischen dem Bild



und der Aufgabenstellung „Das System bleibt funktionstüchtig, wenn nur B2 oder nur B3 funktioniert." sehen kann, gehe ich spontan mal von der Deutung aus, die mir das Bild bietet, das heißt, das System fällt aus, wenn B_1 oder (B_2 und B_3) ausfallen. Seien die Ereignisse

$$A_i = \text{Das Bauteil } B_i \text{ fällt aus}$$

und deren Wahrscheinlichkeiten

$$P(A_1) = 0{,}1$$
$$P(A_2) = 0{,}3$$
$$P(A_3) = 0{,}3$$

gegeben, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gesamtsystem ausfällt

$$P(\text{Ausfall}) = P(A_1) + P(A_2)P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}181$$

2.

(A)

$$A = \bigcap_{i=1}^{4} \overline{W}_i = \overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 \cap \overline{W}_3 \cap \overline{W}_4$$

(B)

$$B = (W_1 \cap \overline{W}_2 \cap \overline{W}_3 \cap \overline{W}_4) \cup (\overline{W}_1 \cap W_2 \cap \overline{W}_3 \cap \overline{W}_4) \cup (\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 \cap W_3 \cap \overline{W}_4) \cup$$
$$(\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 \cap \overline{W}_3 \cap W_4) \cup (\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 \cap \overline{W}_3 \cap \overline{W}_4)$$

(C)

$$P(A) = 0,51^4 = 0{,}06765201$$
$$P(B) = 4 \cdot (0{,}51^2 \cdot 0{,}49) + 0{,}51^4 \approx 0{,}3276$$

3.

Für ein Flugzeug mit zwei Motoren ergibt sich ein Gesamtausfall nur für den Fall, wenn beide Motoren ausfallen, folglich:

$$P(A_2) = q^2$$

Bei vier Motoren müssen entweder drei oder vier Motoren ausfallen, folglich:

$$P(A_4) = 4 \cdot q^3(1-q) + q^4$$

Damit das zweimotorige Flugzeug vorzuziehen ist, muss gelten $P(A_2) < P(A_4)$:

$$\begin{aligned} q^2 &< 4q^{3(1-q)} + q^4 \\ q^2 &< 4q^3 - 3q^4 \\ 0 &> 3q^2 - 4q + 1 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die beiden Lösungen $q_1 = \frac{1}{3}$ und $q_2 = 1$. Da q_2 außerhalb des vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsbereiches liegt, ergibt sich somit, dass für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von $q = \frac{1}{3}$ das zweimotorige dem viermotorigen Flugzeug vorzuziehen ist.

4.

Nehmen wir uns zunächst die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Störungsursachen, welche eine Zerlegung von Ω darstellen:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\text{Störung der Zündanlage}) &&= 0{,}5 \\ P(B) &= P(\text{Fehler in der Kraftstoffzufuhr}) &&= 0{,}3 \\ P(C) &= P(\text{sonstige Fehler}) &&= 0{,}2 \end{aligned}$$

$$D = \text{Der Fahrer kann sich selbst helfen}$$

$$\begin{aligned} P(D|A) &= 0{,}95; \quad P(\overline{D}|A) = 0{,}05 \\ P(D|B) &= 0{,}75; \quad P(\overline{D}|B) = 0{,}25 \\ P(D|C) &= 0{,}15; \quad P(\overline{D}|C) = 0{,}85 \end{aligned}$$

$$P(\overline{D}) = P(\overline{D}|A)P(A) + P(\overline{D}|B)P(B) + P(\overline{D}|C)P(C) = 0{,}27$$

$$\begin{aligned} P(A|\overline{D}) &= \frac{P(\overline{D}|A)P(A)}{P(\overline{D})} = \frac{5}{54} \approx 0{,}0926 \\ P(B|\overline{D}) &= \frac{P(\overline{D}|B)P(B)}{P(\overline{D})} = \frac{5}{18} \approx 0{,}2778 \\ P(C|\overline{D}) &= \frac{P(\overline{D}|C)P(C)}{P(\overline{D})} = \frac{17}{27} \approx 0{,}6296 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} A &= \text{Das Bauteil wurde vom ersten Kontrolleur kontrolliert,} \quad P(A) = 0{,}8 \\ B &= \text{Das Bauteil wurde vom zweiten Kontrolleur kontrolliert,} \quad P(B) = 0{,}2 \\ C &= \text{Das Bauteil wird falsch sortiert} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(C|A) &= 0{,}03 \\ P(C|B) &= 0{,}05 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = \frac{17}{500} = 0{,}034$$

(A)

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} = \frac{12}{17} \approx 0{,}7059$$

(B)

$$P(B|C) = \frac{P(C|B)P(B)}{P(C)} = 1 - P(A|C) = \frac{5}{17} \approx 0{,}2941$$

(C)

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = \frac{483}{500} \approx 0{,}966$$

6.

Die Wahrscheinlichkeiten A_i, dass ein Student der Leistungsklasse i angehört sind folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0{,}1 \\ A_2 &= 0{,}2 \\ A_3 &= 0{,}1 \\ A_4 &= 0{,}4 \\ A_5 &= 0{,}2 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit B, dass ein Student eine Frage beantworten kann unter der Bedingung, dass er einer bestimmten Leistungsklasse angehört, sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} P(B|A_1) &= 0{,}95 \\ P(B|A_2) &= 0{,}8 \\ P(B|A_3) &= 0{,}7 \\ P(B|A_4) &= 0{,}5 \\ P(B|A_5) &= 0{,}3 \end{aligned}$$

Und damit die Wahrscheinlichkeit C, dass der Student zwei Fragen richtig beantwortet:

$$\begin{aligned} P(C|A_1) &= 0{,}9025 \\ P(C|A_2) &= 0{,}64 \\ P(C|A_3) &= 0{,}49 \\ P(C|A_4) &= 0{,}25 \\ P(C|A_5) &= 0{,}09 \end{aligned}$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit $P(C)$, dass ein Student zwei Fragen beantworten kann

$$P(C) = \sum_{i=1}^{5} P(C|A_i)P(A_i) = \frac{1541}{4000} = 0{,}38525$$

Nach Bayesscher Formel gilt

$$P(A_i|C) = \frac{P(C|A_i)P(A_i)}{P(C)}$$

Folglich erhalten wir folgende Lösungen:

$$P(A_1|C) = \frac{361}{1541} \approx 0{,}2343$$
$$P(A_2|C) = \frac{512}{1541} \approx 0{,}3323$$
$$P(A_3|C) = \frac{196}{1541} \approx 0{,}1272$$
$$P(A_4|C) = \frac{400}{1541} \approx 0{,}2596$$
$$P(A_5|C) = \frac{72}{1541} \approx 0{,}0467$$