1.

$$P(A) = P\left(A \cap \overline{B}\right) + P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$$
$$P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

2.

$$A_n \coloneqq \text{von } n \text{ Personen haben mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag}$$

Betrachten wir das Gegenereignis:

$$\overline{A}_n \coloneqq \text{von } n \text{ Personen haben alle an verschiedenen Tagen Geburtstag}$$

Die Wahrscheinlichkeit $P\left(\overline{A}_n\right)$ ist nun

$$P_n\left(\overline{A}_n\right) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365 - (n-1)}{365} = \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

Bei Schaltjahren sieht das nur marginal anders aus:

$$P_s\left(\overline{A}_n\right) = 1 \cdot \frac{365}{366} \cdot \frac{364}{366} \cdot \ldots \cdot \frac{366 - (n-1)}{366} = \frac{366!}{(366-n)! \cdot 366^n}$$

Nicht jedes Jahr ist ein Schaltjahr. Tatsächlich trifft das nach dem Gregorianischen Kalender nur für $\frac{97}{400}$ aller Jahre zu, folglich ergibt sich als Wahrscheinlichkeit für A_n:

$$P(A_n) = 1 - \left(\frac{303}{400} \cdot P_n\left(\overline{A}_n\right) + \frac{97}{400} \cdot P_s\left(\overline{A}_n\right)\right)$$

Schaltsekunden vom IERS beachte ich hier der Einfachheit halber nicht, was einige Tage um eine Sekunde kürzer oder länger machen würde und damit ihre Wahrscheinlichkeit, getroffen zu werden, verändert.

a) $P(A_{20}) = \frac{125122721126720258644307260363993604059056436446613512904013309123874777680935878046505 3}{304266267347122808328813561283253236569799535606263919703135282818498498371582031250000 0}$
$\approx 0{,}4112$

b) $P(A_{30}) = \frac{750198963763850584131404687224875272590952158967456388779363166222784645025537727728717920543596627883689010069537446061027 29 \quad 57916141}{106249846762826598611753132363377645127781740293294827255153633081135867330360376447958124254371359800259 2 \quad 626559040069580078125000000 0}$
$\approx 0{,}7060$

c) $P(A_{50}) = \frac{145502323581455491347586705684859725320711595758446416994935899721509158149230423006974983193583105229403189255955459484329153 \quad 125732098569016308167702089188735010451788356006053178360401976407830693867 6 \quad 226912721375604380 53}{149955908106339963430608199042689042812795450550620185699795859638254363047662317161821122669433054903053388100345044205217 71 \quad 336124736864536471389839978426642799758333394515816053812136350874498020857572555541992187500000}$
$\approx 0{,}9703$

3.

$$q(6) = 1 - \sum_{i=1}^{5} q(i) = \frac{1}{5}$$

a) $P = q(5) + q(6) = \frac{11}{30}$

b) $P = q(1) + q(3) + q(5) = \frac{1}{2}$

c) $P = q(1) + q(2) + q(4) = \frac{1}{2}$

d) $P = 1 - q(1) = \frac{4}{5}$

4.

Ich nehme im Folgenden mal (um des lieben Friedens willen) einen sechsseitigen idealen Würfel an, auch wenn dies nicht explizit angegeben war.

Aufgrund des idealen Würfels ist hier das klassische Modell anwendbar, womit alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind (hier dann $\frac{1}{6}$).

EXPERIMENT 1

Wahrscheinlichkeitsraum: $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ mit

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$\mathfrak{F} = \mathfrak{P}(\Omega)$$
$$P = \left\{(f, p) | f \in \mathfrak{F}, p \coloneqq \frac{|f|}{6}\right\}$$

Das Gegenereignis lautet „Bei vier Würfen wird keine 6 gewürfelt“ und die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt offenbar $\left(\frac{5}{6}\right)^4$, folglich beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Bei vier Würfen mit einem idealen Würfel wird mindestens einmal eine Sechs gewürfelt“ $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0{,}5177$.

EXPERIMENT 2

Wahrscheinlichkeitsraum: $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ mit

$$\Omega = \left\{(a, b) \middle| a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\right\}$$
$$\mathfrak{F} = \mathfrak{P}(\Omega)$$
$$P = \left\{(f, p) | f \in \mathfrak{F}, p \coloneqq \frac{|f|}{36}\right\}$$

Hier können wir wieder über das Gegenereignis herangehen, welches wäre: „bei 24 Würfen mit zwei idealen Würfeln erscheint keinmal auf beiden Würfeln gleichzeitig eine 6“. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Daraus folgt für das eigentliche Ereignis eine Wahrscheinlichkeit von $1 - \frac{114191312420705803871750831604003906 25}{22452257707354557240087211123792674816} = \frac{110331264652839768529121279633922841 91}{22452257707354557240087211123792674816} \approx 0{,}4914$.

Damit ist das durch (a) beschriebene Ereignis wahrscheinlicher.