

1.

Voraussetzung.

$$f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$a \in O(b) : \iff \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a(n) \leq c \cdot b(n)$$

$$\max\{f, g\} := \max\{f(n), g(n)\}$$

$$f + g := f(n) + g(n)$$

Behauptung. $f + g \in O(\max\{f, g\})$

Beweis. Für ein beliebiges n ist ersichtlich, daß

$$f(n) + g(n) \leq 2 \cdot (\max\{f, g\})(n)$$

gilt. Sei o. B. d. A. $\max\{f, g\} = f$, und damit $f(n) \geq g(n)$, so gilt:

$$2 \cdot f(n) \geq g(n)$$

Analog für $\max\{f, g\} = g$.

Damit gilt auch:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (f + g)(n) \leq 2 \cdot (\max\{f, g\})(n)$$

Womit wir für die Definition des Landau-Symbols sowohl c als auch n_0 bestimmt hätten:

$$\begin{aligned} c &= 2 \\ n_0 &= 1 \end{aligned}$$

□

2.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 3n^3 - 2n^2 + 1$$

Die Ableitung von f , $f'(n) = 9n^2 - 4n$, zeigt, daß die Funktion ab $n = 1$ definitiv wächst, da der Funktionswert für $f'(n)$ und damit der Anstieg von f ab dort immer positiv ist.

Weiterhin betrachten wir folgenden Teil unserer Definition für das Landau-Symbol O :

$$3n^3 - 2n^2 + 1 \leq c \cdot n^4$$

woraus nach Division durch n^4 folgt: $c \geq \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + 1$, also für $n \geq 1$ gilt: $c \geq 2$, womit $c = 3$ ein recht sicherer Wert wäre.

Außerdem wissen wir, daß $f \in O(n^3)$ und da $n^3 \in O(n^4)$ muß auch gelten, daß $f \in O(n^4)$ – aber das nur am Rande.

Angenommen es gäbe ein c und ein n_0 , so daß $f \in O(n^2)$, dann würde also gelten:

$$\forall n \geq n_0 : 3n^3 - 2n^2 + 1 \leq c \cdot n^2$$

Und damit nach Umformungen: $c \geq 3n - 2 + \frac{1}{n^2}$

Da c somit immer direkt von n abhängt (Grenzwert für c gegen ein beliebig großes n strebt gegen $3n - 2$), kann es kein konstantes c geben, welches die Ungleichung erfüllt. Womit darin ein Widerspruch entsteht. Also gilt:

$$f \notin O(n^2).$$