Behauptung. *Jede unendliche, aufzählbare Menge enthält eine unendliche, entscheidbare Teilmenge.*

Beweis. Sei M eine unendliche, aufzählbare Menge, d. h. gelte:

$$\forall x \in M : \exists y \in M : y > x$$

sowie

$$\exists \text{ eine totale berechenbare Funktion } f, \text{ deren Wertebereich } M \text{ ist.}$$

Dann können wir uns ein beliebiges $t \in M$ festlegen und uns T als eine Teilmenge von M vorstellen, die folgendermaßen definiert sei:

$$T := \{n | n \geq t\}$$

Und sei weiterhin T_1 die folgendermaßen definierte Teilmenge von M:

$$T_1 := \{n | n < t\}$$

Damit ist $\overline{T} = T_1$.

Nun kann man sich die Funktion f so vorstellen, daß sie für jedes $n \in M$ jeweils den Nachfolger liefert. Also:

$$f : M \to M, (n \mapsto Succ(n))$$

wobei *Succ* die Nachfolgerfunktion ist, die existieren muß, da auf aufzählbaren Mengen eine lineare Ordnung definiert ist. Diese Funktion ist auch berechenbar, da sich leicht ein Programm in einer nahezu beliebigen Sprache schreiben läßt, welches dieses realisiert und wir schon nachgewiesen haben, daß das völlig äquivalent zu der Existenz einer Turingmaschine ist.

Die gleiche Funktion f kann man nun auch auf T definieren, womit deren Aufzählbarkeit ebenso nachgewiesen ist, sowie eine leicht abgewandelte Form der Funktion für T_1, nennen wir sie einmal f_1.

$$f_1 : T_1 \to M : (n \mapsto Succ(n))$$

Hiermit gilt auch das Kriterium $f(x) \geq f(x+1)$ sowie $f_1(x) \geq f_1(x+1)$.

Falls t so gewählt wurde, daß $T_1 = \varnothing$, ist eine Funktion f_1 nicht möglich, allerdings ist T_1 damit nach Definition ebenfalls aufzählbar.

Damit ist bewiesen, daß sowohl T als auch T_1 aufzählbar sind, nach einem Satz aus der Vorlesung gilt demnach, daß T entscheidbar ist (T_1 ist das Komplement zu T). Somit haben wir mindestens eine unendliche entscheidbare Teilmenge von M. □