

## 39.1

$$y'''(x) = f(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$$

$$z''(x) = h(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$$

Wir substituieren:

$$y_1 := y(x), y_2 := y'(x), y_3 := y''(x), y_4 := y'''(x), y_5 := z(x), y_6 := z'(x), y_7 := z''(x)$$

und erhalten damit folgendes System von Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

$$y_3' = f(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$$

$$y_5' = y_6$$

$$y_6' = h(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$$

## 39.3

$$\mathcal{L}(\sin x) = \int_0^{\infty} e^{-px} \cdot \sin x \, dx$$

Dieses Integral läßt sich nach den Integraltabellen im Bronstein (#459) folgendermaßen lösen:

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{-px}}{p^2 + 1} (-p \cdot \sin x - \cos x) \Big|_0^{\infty} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{e^{-pa}}{p^2 + 1} (-p \cdot \sin a - \cos a) - \frac{e^0}{p^2 + 1} (-p \cdot \sin 0 - \cos 0) \\ &= 0 - \frac{1}{p^2 + 1} \cdot (-1) \\ &= \frac{1}{p^2 + 1} \end{aligned}$$

## 39.2

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^{5x}, y(0) = 1, y'(0) = 2$$

Zunächst Laplace-Transformation:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y''(x) - 3y'(x) + 2y(x)) &= \mathcal{L}(e^{5x}) \\
\mathcal{L}(y'') - 3 \cdot \mathcal{L}(y') + 2 \cdot \mathcal{L}(y) &= \frac{1}{p-5} \\
p^2 \mathcal{L}(y) - p \cdot y(0) - y'(0) - 3 \cdot (p \cdot \mathcal{L}(y) - y(0)) + 2\mathcal{L}(y) &= \frac{1}{p-5} \\
\mathcal{L}(y) \cdot (p^2 - 3p + 2) &= \frac{1}{p-5} + p + 5 \\
\mathcal{L}(y) &= \frac{\frac{1}{p-5} + p + 5}{p^2 - 3p + 2} \\
&= \frac{1}{12 \cdot (p-5)} + \frac{20}{3 \cdot (p-2)} - \frac{23}{4 \cdot (p-1)}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt dann für die Rücktransformation:

$$\begin{aligned}
y &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{12 \cdot (p-5)} + \frac{20}{3 \cdot (p-2)} - \frac{23}{4 \cdot (p-1)}\right) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{12 \cdot (p-5)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{20}{3 \cdot (p-2)}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{23}{4 \cdot (p-1)}\right) \\
&= \frac{1}{12} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-5}\right) + \frac{20}{3} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-2}\right) - \frac{23}{4} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right) \\
&= \frac{1}{12} \cdot e^{5x} + \frac{20}{3} e^{2x} - \frac{23}{4} e^x
\end{aligned}$$

### 39.4

Die exakte Lösung läßt sich schnell bestimmen, da die Gleichung eine separable Dgl. ist:

$$y'(x) = 2x \cdot y(x)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x \, dx$$

$$\ln|y| = x^2$$

$$y = e^{x^2}$$

Daraus ergeben sich für  $y_0$  bis  $y_4$  folgende Werte:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= 1 \\
 y_1 &\approx 1.0101 \\
 y_2 &\approx 1.0408 \\
 y_3 &\approx 1.0942 \\
 y_4 &\approx 1.1735
 \end{aligned}$$

Ich habe die beiden Verfahren implementiert: [euler-cauchy-heun.lua]

```

print("Verfahren nach Euler-Cauchy und Euler-Heun:")
print("Startwerte: x0:")
x = {}; y = {}
x[0] = io.read()
print("y0")
y[0] = io.read()

print("Funktion (in Abhaengigkeit von x, y): ")
inputfunc = io.read()

loadstring("f = function (x,y) return " .. inputfunc .. " end")() -- nun kann f direkt

print("Schrittweite: ")
h = io.read()

print("Werte ausrechnen bis i = ?")
n = io.read()

function eulercauchy(x, y, h, f)
  print("Euler-Cauchy")
  for i = 1,n do
    x[i] = x[i-1] + h
    y[i] = y[i-1] + h * f(x[i-1], y[i-1])
    print("x_"..i..":", x[i], "y_"..i..":", y[i])
  end
end

function eulerheun(x, y, h, f)
  print("Euler-Heun:")
  yschlange = {}
  for i = 1,n do
    x[i] = x[i-1] + h
    yschlange[i] = y[i-1] + h * f(x[i-1], y[i-1])
    y[i] = y[i-1] + h / 2 * (f(x[i-1], y[i-1]) + f(x[i], yschlange[i]))
    print("x_"..i..":", x[i], "y_"..i..":", y[i])
  end
end

eulercauchy(x, y, h, f)
eulerheun(x, y, h, f)

```

**(a)**

Daraus ergibt sich für Euler-Cauchy folgende Reihe von Werten:

$$\begin{aligned}y_0 &= 1 \\y_1 &= 1 \\y_2 &= 1.02 \\y_3 &= 1.0608 \\y_4 &= 1.124448\end{aligned}$$

mit den folgenden Differenzen zu den echten Werten:

$$\begin{aligned}\Delta y_0 &= 0 \\ \Delta y_1 &\approx 1.0 \cdot 10^{-2} \\ \Delta y_2 &\approx 2.0 \cdot 10^{-2} \\ \Delta y_3 &\approx 3.3 \cdot 10^{-2} \\ \Delta y_4 &\approx 4.9 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

**(b)**

Euler-Heun ergibt folgende Werte:

$$\begin{aligned}y_0 &= 1 \\y_1 &= 1.01 \\y_2 &= 1.040704 \\y_3 &= 1.0939880448 \\y_4 &= 1.1731927792435\end{aligned}$$

(ja, ich hab nicht gerundet, die Werte sollten auch noch exakt sein, soweit. 64 bit haben da genug Präzision)

mit den folgenden Differenzen zu den echten Werten:

$$\begin{aligned}\Delta y_0 &= 0 \\ \Delta y_1 &\approx 5.0 \cdot 10^{-5} \\ \Delta y_2 &\approx 1.1 \cdot 10^{-4} \\ \Delta y_3 &\approx 1.9 \cdot 10^{-4} \\ \Delta y_4 &\approx 3.1 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

## 39.5

Auch hier habe ich das Verfahren wieder implementiert: [hasen-fuechse.lua]

```
y = {}; z = {}
y[0] = 2000; z[0] = 500
h = .1
n = 30

function bastelmal(y, z, h)
  print("Hasen-Füchse-Problem:")
  for i = 1,n do
    y[i] = y[i-1] + h * (1.75 * y[i-1] - 0.005 * z[i-1] * y[i-1])
    z[i] = z[i-1] + h * (0.0006 * y[i-1] * z[i-1] - 1.05 * z[i-1])
  end
end

bastelmal(y, z, h)

print("CSV")
for i=0,30 do
  print(i, y[i], z[i])
end

print("LaTeX")
print("\\[\\begin{array}{rclcrcl}")
for i=0,30 do
  io.write("y_{", i, "} & = & ", y[i], " & & z_{", i, "} & = & ", z[i], " \\\\n")
end
print("\\end{array}\\]")
```

Es ergibt sich die folgende Wertetabelle:

$y_0$	=	2000	$z_0$	=	500
$y_1$	=	1850	$z_1$	=	507.5
$y_2$	=	1704.3125	$z_2$	=	510.545
$y_3$	=	1567.5030748438	$z_3$	=	509.14546851875
$y_4$	=	1442.7725692185	$z_4$	=	503.57041957104
$y_5$	=	1331.9889748182	$z_5$	=	494.28778079769
$y_6$	=	1235.8941082065	$z_6$	=	481.89071627853
$y_7$	=	1154.3926286186	$z_7$	=	467.02614489216
$y_8$	=	1086.845569109	$z_8$	=	450.33629202063
$y_9$	=	1032.3205419073	$z_9$	=	432.41774157396
$y_{10}$	=	989.77977808508	$z_{10}$	=	413.79750174741
$y_{11}$	=	958.20703952411	$z_{11}$	=	394.92286803103
$y_{12}$	=	936.68433533264	$z_{12}$	=	376.16103922076
$y_{13}$	=	924.43201751559	$z_{13}$	=	357.80477928261
$y_{14}$	=	920.82452358634	$z_{14}$	=	340.08124909727
$y_{15}$	=	925.39123812363	$z_{15}$	=	323.1620271929
$y_{16}$	=	937.80905056598	$z_{16}$	=	307.17309284516
$y_{17}$	=	957.89078113476	$z_{17}$	=	292.20410049005
$y_{18}$	=	985.57186079874	$z_{18}$	=	278.31664678274
$y_{19}$	=	1020.8964087081	$z_{19}$	=	265.55146219821
$y_{20}$	=	1064.0030131893	$z_{20}$	=	253.93459071252
$y_{21}$	=	1115.1099556619	$z_{21}$	=	243.48268886797
$y_{22}$	=	1174.4992127087	$z_{22}$	=	234.20760476012
$y_{23}$	=	1242.4982512321	$z_{23}$	=	226.12040510437
$y_{24}$	=	1319.4583412427	$z_{24}$	=	219.23501504302
$y_{25}$	=	1405.7278163147	$z_{25}$	=	213.57162662096
$y_{26}$	=	1501.6183960115	$z_{26}$	=	209.16002040476
$y_{27}$	=	1607.3623481385	$z_{27}$	=	206.04293032325
$y_{28}$	=	1723.0579349119	$z_{28}$	=	204.27956153742
$y_{29}$	=	1848.6003137978	$z_{29}$	=	203.94933874283
$y_{30}$	=	1983.594962913	$z_{30}$	=	205.15590687076

und damit folgende Skizze:

