## 39.1

$$y'''(x) = f(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$$
$$z''(x) = h(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$$

Wir substituieren:

$$y_1 := y(x), y_2 := y'(x), y_3 := y''(x), y_4 := y'''(x), y_5 := z(x), y_6 := z'(x), y_7 := z''(x)$$

und erhalten damit folgendes System von Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= f(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)) \\ y_5' &= y_6 \\ y_6' &= h(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)) \end{aligned}$$

## 39.3

$$\mathcal{L}(\sin x) = \int_0^\infty e^{-px} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$$

Dieses Integral läßt sich nach den Integraltabellen im Bronstein (#459) folgendermaßen lösen:

$$= \frac{e^{-px}}{p^2+1}(-p \cdot \sin x - \cos x)\Big|_0^\infty$$

$$= \lim_{a \to \infty} \frac{e^{-pa}}{p^2+1}(-p \cdot \sin a - \cos a) - \frac{e^0}{p^2+1}(-p \cdot \sin 0 - \cos 0)$$

$$= 0 - \frac{1}{p^2+1} \cdot (-1)$$

$$= \frac{1}{p^2+1}$$

## 39.2

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^{5x}, y(0) = 1, y'(0) = 2$$

Zunächst Laplace-Transformation:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(y''(x)-3y'(x)+2y(x)\right) &= \mathcal{L}\left(e^{5x}\right)\\
\mathcal{L}\left(y''\right)-3\cdot\mathcal{L}\left(y'\right)+2\cdot\mathcal{L}(y) &= \frac{1}{p-5}\\
p^2\mathcal{L}(y)-p\cdot y(0)-y'(0)-3\cdot(p\cdot\mathcal{L}(y)-y(0))+2\mathcal{L}(y) &= \frac{1}{p-5}\\
\mathcal{L}(y)\cdot\left(p^2-3p+2\right) &= \frac{1}{p-5}+p+5\\
\mathcal{L}(y) &= \frac{\frac{1}{p-5}+p+5}{p^2-3p+2}\\
&= \frac{1}{12\cdot(p-5)}+\frac{20}{3\cdot(p-2)}-\frac{23}{4\cdot(p-1)}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt dann für die Rücktransformation:

$$\begin{aligned}
y &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{12\cdot(p-5)}+\frac{20}{3\cdot(p-2)}-\frac{23}{4\cdot(p-1)}\right)\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{12\cdot(p-5)}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{20}{3\cdot(p-2)}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{23}{4\cdot(p-1)}\right)\\
&= \frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-5}\right)+\frac{20}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-2}\right)-\frac{23}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right)\\
&= \frac{1}{12}\cdot e^{5x}+\frac{20}{3}e^{2x}-\frac{23}{4}e^{x}
\end{aligned}$$

## 39.4

Die exakte Lösung läßt sich schnell bestimmen, da die Gleichung eine separable Dgl. ist:

$$y'(x) = 2x\cdot y(x)$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = x^2$$

$$y = e^{x^2}$$

Daraus ergeben sich für $y_0$ bis $y_4$ folgende Werte:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 1 \\
y_1 &\approx 1.0101 \\
y_2 &\approx 1.0408 \\
y_3 &\approx 1.0942 \\
y_4 &\approx 1.1735
\end{aligned}
$$

Ich habe die beiden Verfahren implementiert: [euler-cauchy-heun.lua]

```
print("Verfahren nach Euler-Cauchy und Euler-Heun:")
print("Startwerte: x0:")
x = {}; y = {}
x[0] = io.read()
print("y0")
y[0] = io.read()

print("Funktion (in Abhaengigkeit von x, y): ")
inputfunc = io.read()

loadstring("f =  function (x,y) return " .. inputfunc .. " end")() -- nun kann f direkt

print("Schrittweite: ")
h = io.read()

print("Werte ausrechnen bis i = ?")
n = io.read()

function eulercauchy(x, y, h, f)
  print("Euler-Cauchy")
  for i = 1,n do
    x[i] = x[i-1] + h
    y[i] = y[i-1] + h * f(x[i-1], y[i-1])
    print("x_"..i..":", x[i], "y_"..i..":", y[i])
  end
end

function eulerheun(x, y, h, f)
  print("Euler-Heun:")
  yschlange = {}
  for i = 1,n do
    x[i] = x[i-1] + h
    yschlange[i] = y[i-1] + h * f(x[i-1], y[i-1])
    y[i] = y[i-1] + h / 2 * (f(x[i-1], y[i-1]) + f(x[i], yschlange[i]))
    print("x_"..i..":", x[i], "y_"..i..":", y[i])
  end
end

eulercauchy(x, y, h, f)
eulerheun(x, y, h, f)
```

### (a)

Daraus ergibt sich für Euler-Cauchy folgende Reihe von Werten:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= 1 \\ y_2 &= 1.02 \\ y_3 &= 1.0608 \\ y_4 &= 1.124448 \end{aligned}$$

mit den folgenden Differenzen zu den echten Werten:

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= 0 \\ \Delta y_1 &\approx 1.0 \cdot 10^{-2} \\ \Delta y_2 &\approx 2.0 \cdot 10^{-2} \\ \Delta y_3 &\approx 3.3 \cdot 10^{-2} \\ \Delta y_4 &\approx 4.9 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

### (b)

Euler-Heun ergibt folgende Werte:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= 1.01 \\ y_2 &= 1.040704 \\ y_3 &= 1.0939880448 \\ y_4 &= 1.1731927792435 \end{aligned}$$

(ja, ich hab nicht gerundet, die Werte sollten auch noch exakt sein, soweit. 64 bit haben da genug Präzision)

mit den folgenden Differenzen zu den echten Werten:

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= 0 \\ \Delta y_1 &\approx 5.0 \cdot 10^{-5} \\ \Delta y_2 &\approx 1.1 \cdot 10^{-4} \\ \Delta y_3 &\approx 1.9 \cdot 10^{-4} \\ \Delta y_4 &\approx 3.1 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

## 39.5

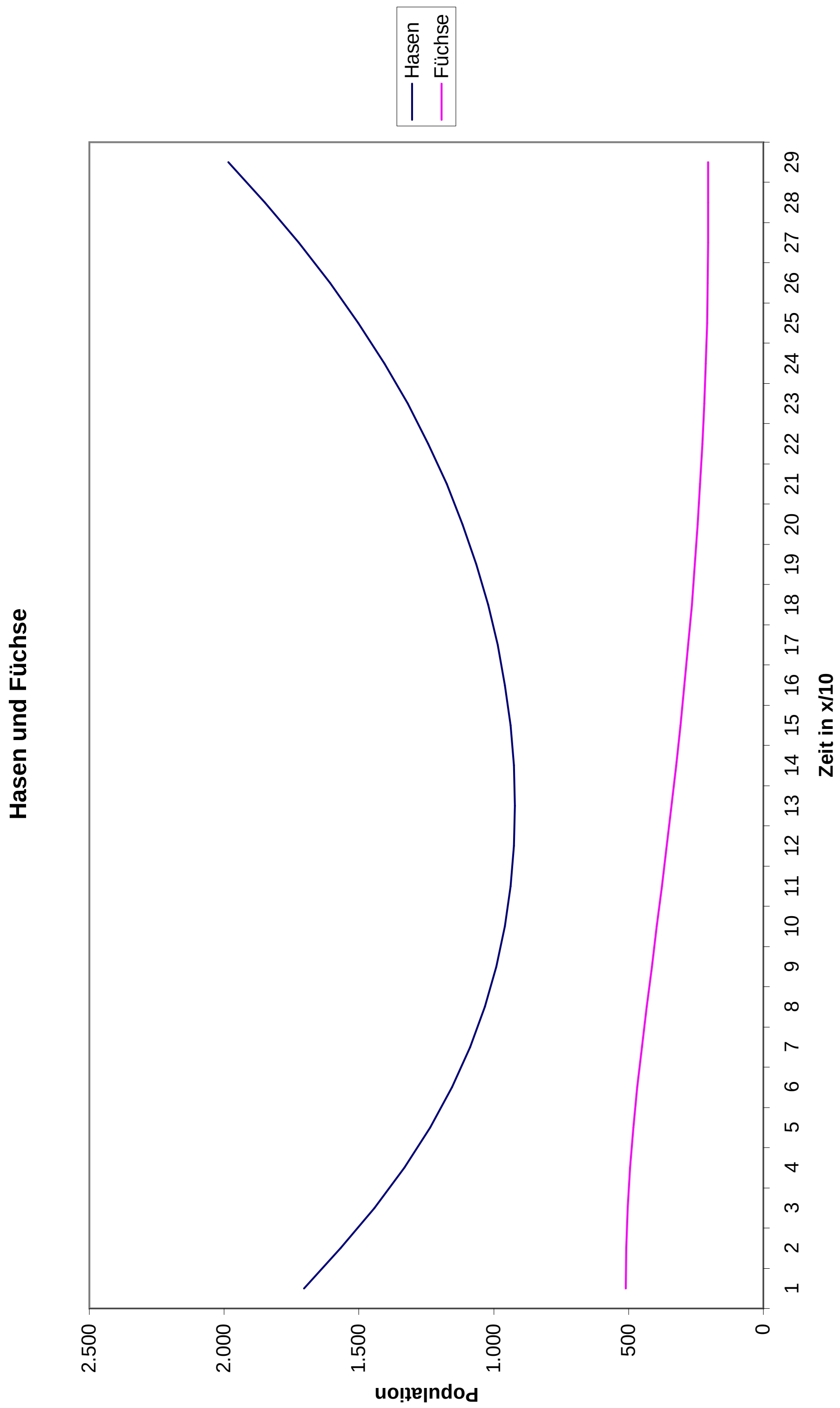
Auch hier habe ich das Verfahren wieder implementiert: [hasen-fuechse.lua]

```
y = {}; z = {}
y[0] = 2000; z[0] = 500
h = .1
n = 30

function bastelmal(y, z, h)
  print("Hasen-Füche-Problem:")
  for i = 1,n do
    y[i] = y[i-1] + h * (1.75 * y[i-1] - 0.005 * z[i-1] * y[i-1])
    z[i] = z[i-1] + h * (0.0006 * y[i-1] * z[i-1] - 1.05 * z[i-1])
  end
end

bastelmal(y, z, h)

print("CSV")
for i=0,30 do
  print(i, y[i], z[i])
end

print("LaTeX")
print("\\[\\begin{array}{rclcrcl}")
for i=0,30 do
  io.write("y_{", i, "} & = & ", y[i], " & & z_{", i, "} & = & ", z[i], " \\\\\n")
end
print("\\end{array}\\]")
```

Es ergibt sich die folgende Wertetabelle:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_0$ | $=$ | 2000 | $z_0$ | $=$ | 500 |
| $y_1$ | $=$ | 1850 | $z_1$ | $=$ | 507.5 |
| $y_2$ | $=$ | 1704.3125 | $z_2$ | $=$ | 510.545 |
| $y_3$ | $=$ | 1567.5030748438 | $z_3$ | $=$ | 509.14546851875 |
| $y_4$ | $=$ | 1442.7725692185 | $z_4$ | $=$ | 503.57041957104 |
| $y_5$ | $=$ | 1331.9889748182 | $z_5$ | $=$ | 494.28778079769 |
| $y_6$ | $=$ | 1235.8941082065 | $z_6$ | $=$ | 481.89071627853 |
| $y_7$ | $=$ | 1154.3926286186 | $z_7$ | $=$ | 467.02614489216 |
| $y_8$ | $=$ | 1086.845569109 | $z_8$ | $=$ | 450.33629202063 |
| $y_9$ | $=$ | 1032.3205419073 | $z_9$ | $=$ | 432.41774157396 |
| $y_{10}$ | $=$ | 989.77977808508 | $z_{10}$ | $=$ | 413.79750174741 |
| $y_{11}$ | $=$ | 958.20703952411 | $z_{11}$ | $=$ | 394.92286803103 |
| $y_{12}$ | $=$ | 936.68433533264 | $z_{12}$ | $=$ | 376.16103922076 |
| $y_{13}$ | $=$ | 924.43201751559 | $z_{13}$ | $=$ | 357.80477928261 |
| $y_{14}$ | $=$ | 920.82452358634 | $z_{14}$ | $=$ | 340.08124909727 |
| $y_{15}$ | $=$ | 925.39123812363 | $z_{15}$ | $=$ | 323.1620271929 |
| $y_{16}$ | $=$ | 937.80905056598 | $z_{16}$ | $=$ | 307.17309284516 |
| $y_{17}$ | $=$ | 957.89078113476 | $z_{17}$ | $=$ | 292.20410049005 |
| $y_{18}$ | $=$ | 985.57186079874 | $z_{18}$ | $=$ | 278.31664678274 |
| $y_{19}$ | $=$ | 1020.8964087081 | $z_{19}$ | $=$ | 265.55146219821 |
| $y_{20}$ | $=$ | 1064.0030131893 | $z_{20}$ | $=$ | 253.93459071252 |
| $y_{21}$ | $=$ | 1115.1099556619 | $z_{21}$ | $=$ | 243.48268886797 |
| $y_{22}$ | $=$ | 1174.4992127087 | $z_{22}$ | $=$ | 234.20760476012 |
| $y_{23}$ | $=$ | 1242.4982512321 | $z_{23}$ | $=$ | 226.12040510437 |
| $y_{24}$ | $=$ | 1319.4583412427 | $z_{24}$ | $=$ | 219.23501504302 |
| $y_{25}$ | $=$ | 1405.7278163147 | $z_{25}$ | $=$ | 213.57162662096 |
| $y_{26}$ | $=$ | 1501.6183960115 | $z_{26}$ | $=$ | 209.16002040476 |
| $y_{27}$ | $=$ | 1607.3623481385 | $z_{27}$ | $=$ | 206.04293032325 |
| $y_{28}$ | $=$ | 1723.0579349119 | $z_{28}$ | $=$ | 204.27956153742 |
| $y_{29}$ | $=$ | 1848.6003137978 | $z_{29}$ | $=$ | 203.94933874283 |
| $y_{30}$ | $=$ | 1983.594962913 | $z_{30}$ | $=$ | 205.15590687076 |

und damit folgende Skizze:


Hasen und Füchse
Hasen
Füchse
Population
2.500
2.000
1.500
1.000
500
0
Zeit in x/10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29