

**38.1**

$$T'(x) = -\alpha \cdot (T(x) - T_L)$$

**(a)**

$$T(x) = T_L + A \cdot e^{-\alpha x}$$

$$T'(x) = -\alpha A \cdot e^{-\alpha x}$$

Einsetzen:

$$-\alpha A \cdot e^{-\alpha x} = -\alpha \cdot (T_L + A \cdot e^{-\alpha x} - T_L)$$

$$-\alpha A \cdot e^{-\alpha x} = -\alpha A \cdot e^{-\alpha x}$$

Folglich ist dies eine Lösung der Dgl.

**(b)**

Im Folgenden wurden Einheiten weggelassen. Temperaturen wurden in °C, Zeiteinheiten in Minuten angegeben.

$$T_L = 30$$

$$T(0) = 300$$

$$T(10) = 200$$

Wir erhalten also folgendes Gleichungssystem:

$$300 = 30 + A$$

$$200 = 30 + A e^{-10\alpha}$$

$A = 270$  ist schnell ersichtlich, daraus folgt dann direkt  $\alpha = \frac{\ln \frac{170}{270}}{-10} \approx 0.04626$ .

Das führt uns auf die Gleichung, in der wir überhaupt erst  $x$  suchen:

$$100 = T(x) = 30 + 270e^{-\alpha x}$$

$$-\alpha x = \ln \frac{70}{270}$$

$$x = \frac{\ln \frac{7}{27}}{-\alpha} \approx 29.18 \text{ min}$$

## 38.2

$$y''(x) + 2y'(x) - 15y(x) = 2e^x \cdot (-5 + 4x - 6x^2)$$

Zunächst suchen wir die Lösung der homogenen Gleichung:

$$y''(x) + 2y'(x) - 15y(x) = 0$$

Dies ist eine lineare Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ansatz:  $y(x) = e^{\lambda x}$

Daraus folgen:  $y'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ ,  $y''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$

Einsetzen und kürzen führt uns auf das charakteristische Polynom:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$$

und auf die beiden Lösungen  $\lambda = 3$  sowie  $\lambda = -5$

und damit die Lösung der homogenen Gleichung:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-5x}$$

Nun haben wir einen Ansatz für die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2) \cdot e^x \\ y_1'(x) &= e^x \cdot (a_0 + a_1(x+1) + a_2(x^2 + 2x)) \\ y_1''(x) &= e^x \cdot (a_0 + a_1(x+2) + a_2(x^2 + 4x + 2)) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung liefert:

$$\begin{aligned} &e^x \cdot (a_0 + a_1(x+2) + a_2(x^2 + 4x + 2)) \\ &+ 2e^x \cdot (a_0 + a_1(x+1) + a_2(x^2 + 2x)) \\ &- 15e^x \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2) = 2e^x \cdot (-5 + 4x - 6x^2) \\ &(a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_0 + 2a_1 - 15a_0) \\ &+ x \cdot (a_1 + 4a_2 + 2a_1 + 4a_2 - 15a_1) \\ &+ x^2 \cdot (a_2 + 2a_2 - 15a_2) = -10 + 8x - 12x^2 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert folgendes LGS:

$$\begin{pmatrix} -12 & 4 & 2 \\ 0 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$a_2 = 1, a_1 = 0, a_0 = 1$$

und damit der allgemeinen Lösung der obigen Dgl.:

$$y(x) = e^x(x^2 + 1) + C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-5x}$$

### 38.3

$$x^2 y''(x) - 2y(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

Zunächst Lösen der zugehörigen homogenen Gleichung:

$$x^2 y''(x) - 2y(x) = 0$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} y(x) &= x^\lambda \\ y'(x) &= \lambda x^{\lambda-1} \\ y''(x) &= \lambda(\lambda-1) \cdot x^{\lambda-2} \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$x^2(\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}) - 2x^\lambda = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Diese Gleichung liefert die Lösungen  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$  und damit die linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung  $x^2$  sowie  $\frac{1}{x}$  was uns auf die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung führt:

$$y(x) = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot \frac{1}{x}$$

Wenden wir nun die „Variation der Konstanten“ an, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} x^2 & x^{-1} \\ 2x & -x^{-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 + \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

Dieses läßt sich mit der Cramerschen Regel leicht lösen:

$$\det \mathfrak{A} = -1 - 2 = -3$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & x^{-1} \\ x^2 + \frac{1}{x} & -x^{-2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{x} \left( x^2 + \frac{1}{x} \right) = -x - x^{-2}$$

$$\det \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & x^2 + \frac{1}{x} \end{pmatrix} = x^4 + x$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x + x^{-2}) \\ -\frac{1}{3}(x^4 + x) \end{pmatrix}$$

und folglich:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{6} - \frac{1}{3x} + D_1 \\ -\frac{x^5}{15} - \frac{x^2}{6} + D_2 \end{pmatrix}$$

Und damit die Lösung:

$$y(x) = \left( \frac{x^2}{6} - \frac{1}{3x} + D_1 \right) \cdot x^2 + \left( -\frac{x^5}{15} - \frac{x^2}{6} + D_2 \right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \left( \frac{x^2}{6} - \frac{1}{3x} + D_1 \right) \cdot x^2 + \left( -\frac{x^5}{15} - \frac{x^2}{6} + D_2 \right) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{x^5 + 10D_1x^3 - 5x^2 + 10D_2}{10x} \end{aligned}$$

## 38.4

$$I := \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$$

zusammengesetzte Trapezregel:  $n = 10, \forall i \in \{0, \dots, 10\} : x_i := 1 + \frac{i}{10}$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx &\approx \frac{1}{20} \left( \frac{1}{\sqrt{1+1^4}} + \frac{1}{\sqrt{1+2^4}} \right) + \frac{1}{10} \sum_{i=1}^9 \frac{1}{\sqrt{1+x_i^4}} \\ &= \frac{\sqrt{17}}{340} + \frac{\sqrt{2}}{40} + \frac{1}{10} \sum_{i=1}^9 \frac{1}{\sqrt{1+x_i^4}} \\ &= \frac{\sqrt{17}}{340} + \frac{\sqrt{2}}{40} + \frac{10\sqrt{140321}}{140321} + \frac{10\sqrt{93521}}{93521} + \frac{10\sqrt{38561}}{38561} + \frac{5\sqrt{7186}}{14372} \\ &\quad + \frac{10\sqrt{24641}}{24641} + \frac{5\sqrt{4721}}{9442} + \frac{5\sqrt{3026}}{6052} + \frac{5\sqrt{1921}}{3842} + \frac{2\sqrt{97}}{485} \\ &\approx 0.43048 \end{aligned}$$

Fehlerabschätzung für die zusammengesetzte Trapezregel:

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx - \dots \right| \leq \frac{(2-1)^3}{12 \cdot n^2} \cdot M_2$$

mit  $M_2 := \max_{x \in [1,2]} |f''(x)|$  und  $n = 10$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} \\ f'(x) &= -\frac{2x^3}{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}} \\ f''(x) &= \frac{6x^2(x^4+1)}{(x^4+1)^{\frac{5}{2}}} \\ f'''(x) &= -\frac{12x(2x^8-7x^4+1)}{(x^4+1)^{\frac{7}{2}}} \end{aligned}$$

Nullstellen der dritten Ableitung im fraglichen Intervall gibt es lediglich eine:

$$x = \left( \frac{\sqrt{41}}{4} + \frac{7}{4} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 0.6215$$

Überprüfen der Intervallgrenzen:

$$f''(1) = 0$$

$$f''(2) \approx 0.3021$$

Folglich gilt:

$$M_2 \approx 1.3928$$

und damit als Fehlerabschätzung:

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx - \dots \right| \leq 0.00116$$