37.1

(a)

Exakter Wert:

$$\int_0^1 x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5\Big|_0^1 = \frac{1}{5} = 0.2$$

Trapezregel:

$$\int_0^1 x^4 \, \mathrm{d}x \approx \frac{1-0}{2}(0^4 + 1^4) = \frac{1}{2} = 0.5$$

Simpson-Regel:

$$\int_0^1 x^4 \, \mathrm{d}x \approx \frac{1-0}{6}\left(0^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1^4\right) = \frac{5}{24} \approx 0.2083$$

$\frac{3}{8}$-Regel:

$$\int_0^1 x^4 \, \mathrm{d}x \approx \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}\left(0^4 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^4 + 1^4\right) = \frac{11}{54} \approx 0.2037$$

(b)

Exakter Wert:

$$\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x|_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = 2$$

Trapezregel:

$$\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x \approx \frac{\pi - 0}{2}(\sin \pi + \sin 0) = 0$$

Simpson-Regel:

$$\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x \approx \frac{\pi - 0}{6}\left(\sin 0 + 3 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$$

$\frac{3}{8}$-Regel:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x &\approx \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{3}\left(\sin 0 + 3\cdot\sin\frac{\pi}{3} + 3\cdot\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\pi\right)\\ &= \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{3}\left(3\cdot\sin\frac{\pi}{3} + 3\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \frac{3}{8}\pi\cdot\sqrt{3} \approx 2.0405\end{aligned}$$

37.2

(a)

$$y'(x) = \sqrt{1 + y(x)}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \cdot \sqrt{1 + y(x)}$$

Hier handelt es sich also um eine separable Dgl.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 + y(x)}} = 1 \,\mathrm{d}x$$

$$2\sqrt{1 + y(x)} = x + C$$

$$y(x) = \left(\frac{x + C}{2}\right)^2 - 1$$

Da $y(1) = 3$ ergeben sich folgende Werte für C

$$C_1 = 3, C_2 = -5$$

Folglich erfüllen die folgenden beiden Funktionen $y_i(x)$ die obige Dgl.:

$$y_1(x) = \left(\frac{x + 3}{2}\right)^2 - 1$$

$$y_2(x) = \left(\frac{x - 5}{2}\right)^2 - 1$$

(b)

$$y'(x) = 2x \cdot (y(x))^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \cdot (y(x))^2$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{(y(x))^2} = \int 2x \, \mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}$$

Da $y(0) = 1$ gilt, ergibt sich folgendes:

$$1 = -\frac{1}{0^2 + C} \Rightarrow C = -1$$

Folglich erfüllt folgende Funktion $y(x)$ obige Dgl.:

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 - 1}$$

(c)

$$y'(x) - y(x) = x^3 \cdot e^x$$

Dies ist eine lineare Dgl. 1. Ordnung.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = 1 \, \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = x \Rightarrow \ln|y| = x + \ln|C|$$

$$y = e^x \cdot C$$

Dies führt uns zu

$$y(x) = C(x) \cdot e^x$$

$$y'(x) = C'(x) \cdot e^x + C(x) \cdot e^x = e^x(C(x) + C'(x))$$

Setzen wir dies nun in die Ausgangsgleichung ein, so erhalten wir

$$e^x(C(x) + C'(x) - C(x)) = x^3 \cdot e^x$$

$$C'(x) = x^3$$

$$C(x) = \frac{1}{4}x^4 + D$$

Folglich:

$$y(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 + D\right) \cdot e^x$$

Da $y(1) = 0$:

$$0 = \left(\frac{1}{4} + D\right) \cdot e$$

$$D = -\frac{1}{4}$$

Was uns zur endgültigen Funktion führt:

$$y(x) = \frac{e^x}{4}\left(x^4 - 1\right)$$

37.3

$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = \frac{x}{y(x)}$$

$$y' \cdot y - \frac{2}{x}y^2 = x$$

Subst.: $z := y^2, z'(x) = 2y \cdot y'$

Damit:

$$z'(x) - \frac{4}{x}z(x) = 2x$$

Dies ist wiederum eine lineare Dgl. 1. Ordnung.

$$z'(x) - \frac{4}{x} = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int \frac{4\,\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|z| = 4 \cdot \ln|x| + \underbrace{D}_{=:\ln|C|}$$

$$z = x^4 \cdot C$$

Im Folgenden sei $C(x)$ wieder eine Funktion:

$$z(x) = C(x) \cdot x^4$$

$$z'(x) = C'(x) \cdot x^4 + C(x) \cdot 4x^3$$

Einsetzen:

$$C'(x) \cdot x^4 + C(x) \cdot 4x^3 - \frac{4}{x}C(x) \cdot x^4 = 2x$$

$$C'(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$C(x) = -\frac{1}{x^2} + E$$

Woraus folgt:

$$z(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + E\right) \cdot x^4 = -x^2 + Ex^4$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm x\sqrt{Ex^2 - 1}$$

37.4

(a)

$$y'''(x) - 3y''(x) + 4y'(x) - 12y(x) = 0$$

Dies ist eine lineare Dgl. n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir betrachten hier das charakteristische Polynom nach folgendem Ansatz:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

und damit:

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 12\right) = 0$$

Wir erhalten hier die Nullstellen

$$\lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = \pm 2i$$

Die eine reelle Nullstelle liefert uns als Lösung

$$C_1 \cdot e^{3x}$$

und die beiden komplexen dann

$$C_2 \cdot \cos 2x, C_3 \cdot \sin 2x$$

Was uns zu der allgemeinen Lösung führt:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot \cos 2x + C_3 \cdot \sin 2x$$

(b)

$$y''(x) - \frac{6}{x^2} \cdot y(x) = 0$$

Ansatz hier: $y(x) = y_1(x) \cdot \int u(x)\,\mathrm{d}x$ wobei y_1 eine spezielle Lösung der Gleichung ist.

Eine Lösung ist hier beispielsweise $y_1(x) = x^3$, wie leicht ersichtlich ist (O-Ton Fr. Lau :-)

$$y(x) = x^3 \cdot \int u(x)\,\mathrm{d}x$$

$$y'(x) = 3x^2 \cdot \int u(x)\,\mathrm{d}x + x^3 u(x)$$

$$y''(x) = 6x \int u(x)\,\mathrm{d}x + 6x^2 u(x) + x^3 u'(x)$$

Einsetzen:

$$x^3 u'(x) + 6x^2 u(x) + 6x \int u(x)\,\mathrm{d}x - \frac{6}{x} x^3 \int u(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$x^3 u'(x) + 6x^2 u(x) = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\int \frac{6}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|u| = -6 \cdot \ln|x| + \ln|C|$$

$$u = x^{-6} \cdot C$$

Daraus folgt dann

$$y(x) = x^3 \int x^{-6} C\,\mathrm{d}x$$

und daraus die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y(x) &= C \cdot x^3 \cdot \left(-\frac{x^{-5}}{5} + D\right) \\ &= C \cdot \left(-\frac{1}{5}x^{-2} + Dx^3\right) \\ &= C_1 \cdot x^{-2} + C_2 \cdot x^3 \end{aligned}$$

37.5

$$y^{\mathrm{IV}}(x) - 2y'''(x) + 17y''(x) - 32y'(x) + 16y(x) = x$$

Zunächst Lösen der homogenen Gleichung:

$$y''''(x) - 2y'''(x) + 17y''(x) - 32y'(x) + 16y(x) = 0$$

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$:

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^4 - 2\lambda^3 + 17\lambda^2 - 32\lambda + 16\right) = 0$$

Nullstellen dieses Polynoms sind:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_{3,4} = \pm 4i$$

Dies führt uns auf die Lösung der homogenen Gleichung:

$$y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot xe^x + C_3 \cdot \cos 4x + C_4 \cdot \sin 4x$$

Um nun die Lösung der inhomogenen Gleichung zu erhalten, gilt es, folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x & \cos 4x & \sin 4x \\ e^x & e^x(x+1) & -4\cdot\sin 4x & 4\cdot\cos 4x \\ e^x & e^x(x+2) & -16\cdot\cos 4x & -16\cdot\sin 4x \\ e^x & e^x(x+3) & 64\cdot\sin 4x & -64\cdot\cos 4x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Nur irgendwie kommt da keine sinnvolle Lösung heraus; scheinbar irgendwas übersehen :-/

37.6

$$y''(x) - \frac{1}{x}\cdot y'(x) + \left(1 + \frac{\cot x}{x}\right)\cdot y(x) = 0$$

Zunächst zeigen wir, daß $y_1(x) = \sin x$ tatsächlich eine Lösung ist:

$$y_1'(x) = \cos x, y_1''(x) = -\sin x$$

$$-\sin x - \frac{\cos x}{x} + \left(1 + \frac{\cot x}{x}\right)\cdot \sin x = 0$$

$$-\sin x - \frac{\cos x}{x} + \frac{\cos x}{x} + \sin x = 0$$

Sieht gut aus :-)

$$y(x) = \sin x \cdot \int u(x)\,\mathrm{d}x$$

$$y'(x) = \cos x \int u(x)\,\mathrm{d}x + u(x)\cdot\sin x$$

$$y''(x) = 2\cdot u(x)\cdot\cos x + \sin x\cdot\left(u'(x) - \int u(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Nun können wir einsetzen:

$$y''(x) - \frac{1}{x}\cdot\left(\cos x\int u(x)\,\mathrm{d}x + u(x)\cdot\sin x\right) + \left(1 + \frac{\cot x}{x}\right)\cdot\sin x\cdot\int u(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$y''(x) - \frac{\cos x\int u(x)\,\mathrm{d}x}{x} - \frac{u(x)\cdot\sin x}{x} + \frac{\cos x\int u(x)\,\mathrm{d}x}{x} + \sin x\int u(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$y''(x) + \sin x\left(\int u(x)\,\mathrm{d}x - \frac{u(x)}{x}\right) = 0$$

$$2 \cdot u(x) \cdot \cos x + \sin x \cdot \left(u'(x) - \int u(x)\,\mathrm{d}x\right) + \sin x \left(\int u(x)\,\mathrm{d}x - \frac{u(x)}{x}\right) = 0$$

$$u'(x) \cdot \sin x + u(x) \cdot \left(2\cos x - \frac{\sin x}{x}\right) = 0$$

Unter der Voraussetzung, daß $\sin x \neq 0$ können wir diese Gleichung nun in eine Lineare Dgl. 1. Ordnung überführen:

$$u'(x) + u(x) \cdot \left(2 \cdot \cot x - \frac{1}{x}\right) = 0$$

Wir können diese nun nach der Methode der Trennung der Veränderlichen lösen:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -2 \cdot \int \cot x + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|u| = \ln|x \cdot \sin x| + \ln|C|$$

$$u = x \cdot \sin x + C$$

Nun fehlt uns noch $y(x)$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sin x \cdot \int x \cdot \sin x + C\,\mathrm{d}x \\ &= \sin x \cdot (-x \cdot \cos x + \sin x + Cx) \\ &= -x \cdot \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x + Cx \cdot \sin x \end{aligned}$$