36.1

$$f(x) = x^3 \in C[-1, 1]$$

erste Referenz:

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = 1$$

Damit ist $n = 3$

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

Wir erhalten über $y(x_i) - f(x_i) = (-1)^i \cdot c$ folgendes LGS

$$\begin{aligned}
c_0 - c_1 + c_2 + 1 &= -c \\
c_0 - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{8} &= c \\
c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 - \frac{1}{8} &= -c \\
c_0 + c_1 + c_2 - 1 &= c
\end{aligned}$$

was uns zu folgender Lösung führt:

$$c_0 = 0, c_1 = \frac{3}{4}, c_2 = 0, c = -\frac{1}{4}$$

Daraus folgt

$$y(x) = \frac{3}{4}x$$

Nun müssen wir noch

$$\|y(x) - f(x)\|_\infty = \max_{x \in [-1,1]} |y(x) - f(x)|$$

bestimmen:

$$\begin{aligned}
y(x) - f(x) &= \frac{3}{4}x - x^3 \\
(y(x) - f(x))' &= \frac{3}{4} - 3x^2
\end{aligned}$$

$$\frac{3}{4} - 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$$

Weiterhin müssen wir noch die Ränder des Intervalls betrachten:

$$x_3 = -1, x_4 = 1$$

womit wir alle potentiellen Extremalstellen hätten, nun müssen wir nur noch die mit dem betragsmäßig größten Funktionswert finden:

$$\begin{aligned} y(x_1) - f(x_1) &= -\frac{1}{4} \\ y(x_2) - f(x_2) &= \frac{1}{4} \\ y(x_3) - f(x_3) &= \frac{1}{4} \\ y(x_4) - f(x_4) &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

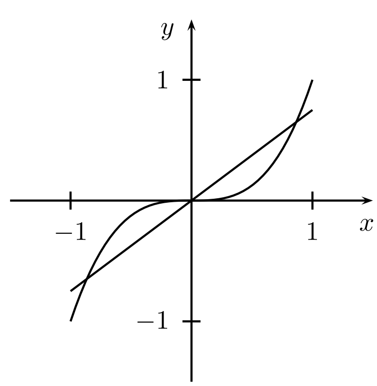
Damit ist die Maximumnorm

$$\|y(x) - f(x)\|_\infty = \frac{1}{4} = c$$

und wir sind fertig und haben mit

$$\widetilde{f}(x) = \frac{3}{4}x$$

eine Approximation an $f(x) = x^3$.



36.2

$$n = 2, [a, b] := \left[0, \frac{\pi}{2}\right], y_1(x) := \sin x, y_2(x) := \cos x$$

Damit das Interpolationsproblem für beliebige Referenzen aus dem Intervall und für beliebige über dem Intervall stetige Funktionen f lösbar ist, muß die Haarsche Bedingung gelten:

$$H := \begin{vmatrix} \sin x_0 & \cos x_0 \\ \sin x_1 & \cos x_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Wir erhalten damit die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} H = \sin x_0 \cdot \cos x_1 - \cos x_0 \cdot \sin x_1 &\neq 0 \\ \frac{1}{2}(\sin(x_0 - x_1) + \sin(x_0 + x_1) - \sin(x_1 - x_0) - \sin(x_1 + x_0)) &\neq 0 \\ \frac{1}{2}(\sin(x_0 - x_1) - \sin(-(x_0 - x_1))) &\neq 0 \\ \frac{1}{2}(\sin(x_0 - x_1) + \sin(x_0 - x_1)) &\neq 0 \\ \sin(x_0 - x_1) &\neq 0 \end{aligned}$$

Da man x_0 und x_1 nie so wählen kann, daß $x_0 - x_1$ ein ganzzahliges Vielfaches von π ergibt, ist diese Ungleichung in der Tat für alle $x_0, x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ erfüllt.

36.3

$$x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6$$

$$f(0) = 7, f(2) = 2, f(4) = -6, f(6) = 0$$

Wir haben hier also $n = 3$, folglich ist das Lagrangesche Interpolationspolynom

$$g(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \cdot L_i(x)$$

mit

$$L_i = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

Daraus ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} g(x) &= 7 \cdot \frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(-2)(-4)(-6)} + 2 \cdot \frac{x(x-4)(x-6)}{(2)(2-4)(2-6)} - 6 \cdot \frac{x(x-2)(x-6)}{(4)(4-2)(4-6)} \\ &= -\frac{5}{24}x^3 + 2x^2 - \frac{17}{3}x + 7 \end{aligned}$$

36.4

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$$

$$f(0) = -1, f(1) = 0, f(2) = 13, f(3) = 146, f(4) = 723, f(5) = 2404$$

Basteln wir uns mal dieses hübsche Rechenschema:

$$\begin{array}{c|rrrrrr}
0 & -1 & & & & & \\
1 & 0 & 1 & & & & \\
2 & 13 & 7 & 6 & & & \\
3 & 146 & 49 & 24 & 18 & & \\
4 & 723 & 181 & 60 & 27 & 9 & \\
5 & 2404 & 481 & 120 & 38 & 10 & 1
\end{array}$$

Folglich erhalten wir

$$\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 6, \alpha_3 = 18, \alpha_4 = 9, \alpha_5 = 1$$

und damit das Newtonsche Interpolationspolynom

$$\begin{aligned}
p_5(x) &= -1 + x + 6x(x-1) + 18x(x-1)(x-2) + 9x(x-1)(x-2)(x-3) \\
&+ x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)
\end{aligned}$$

bzw.

$$p_5(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + x - 1$$