

34.1

Was wir hier suchen, ist das Volumen eines Rotationskörpers um die y -Achse. Dies ist äquivalent zu dem Volumen eines Rotationskörpers um die x -Achse, bei dem die Umkehrfunktion zum Tragen kommt. Wenn $f(x) = \sqrt{x}$, dann gilt offenbar $f^{-1}(x) = x^2$.

Folglich müssen wir folgendes berechnen:

$$\pi \int_0^3 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^3 x^4 dx = \pi \cdot \left(\frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^3 = \frac{243}{5} \pi \text{ VE} \approx 152.68 \text{ VE}$$

34.2

(a)

$$y^2 = \frac{1}{9} \cdot x \cdot (x - 3)^2$$

Diese Funktion ist symmetrisch zur x -Achse, womit wir im Folgenden auch nur eine Hälfte betrachten müssen, wenn wir beim Integrieren einen entsprechenden Faktor berücksichtigen. Dies führt uns zunächst zu folgender „Halbfunktion“:

$$y = \frac{1}{3} \sqrt{x} \cdot |x - 3| = \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{x}$$

Die Bogenlänge s der Funktion bestimmt sich nun folgendermaßen (der Faktor 2 aus den vorher angestellten Überlegungen zur Symmetrie):

$$s = 2 \cdot \int_0^3 \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

was bedeutet, wir benötigen die Ableitung y' , ihr Quadrat sowie wünschenswerterweise noch die Wurzel aus der Summe des Quadrates der Ableitung und 1.

$$y' = \frac{1}{2} \sqrt{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(y')^2 = \left(\frac{1}{2} \sqrt{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2$$

$$\sqrt{(y')^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{4}x + \frac{1}{4x} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Damit integrieren wir also folgendes:

$$2 \cdot \int_0^3 \frac{1}{2} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_0^3 x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_0^3 = 4\sqrt{3} \text{ LE} \approx 6.928 \text{ LE}$$

(b)

$$y = 4 \cdot \cosh \frac{x}{4}$$

$$y' = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sinh \frac{x}{4} = \sinh \frac{x}{4}$$

$$\sqrt{(y')^2 + 1} = \sqrt{\sinh^2 \frac{x}{4} + 1} = \sqrt{\cosh^2 \frac{x}{4}} = \cosh \frac{x}{4}$$

Damit kommen wir auf folgendes Integral:

$$\int_0^4 \cosh \frac{x}{4} dx = 4 \cdot \sinh 1 \Big|_0^4 = 4 \cdot \sinh 1 \text{ LE} \approx 4.7 \text{ LE}$$

(c)

$$x = a \cdot (t - \sin t), y = a \cdot (1 - \cos t), a > 0, t \in [0, 2\pi]$$

$$x' = a \cdot (1 - \cos t), y' = a \cdot \sin t$$

Nach Vorlesung gilt:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \underbrace{\sin^2 t}_{= 1 - \cos^2 t} \text{ (Trig. Pyth.)}} dt = a \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cdot \cos t + \cos^2 t + (1 - \cos^2 t)} dt$$

$$= a \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cdot \cos t} dt = 2a \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dt$$

Der Wurzelterm ist nach Tafelwerk, Formelsammlung oder meinetwegen auch nach

http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities#Half-angle_formul.C3.A6

auflösbar zu folgendem:

$$= 2a \cdot \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2a \cdot \left(-2 \cdot \cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = -4a \cdot (\cos \pi - \cos 0) = 8a$$

(d)

$$r = 3\varphi^2, \alpha \leq \varphi \leq \alpha + 2\pi$$

Die Bogenlänge ist nach Vorlesung

$$s = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2} d\varphi$$

Weiterhin haben wir gegeben, bzw. können leicht ermitteln:

$$f(\varphi) = 3\varphi^2, (f(\varphi))^2 = 9\varphi^4$$

$$f'(\varphi) = 6\varphi, (f'(\varphi))^2 = 36\varphi^2$$

was uns auf Folgendes führt:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \sqrt{9\varphi^4 + 36\varphi^2} d\varphi = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} 3\varphi \cdot \sqrt{\varphi^2 + 4} d\varphi$$

Substituieren wir nun $z := \varphi^2 + 4$, $dz = 2\varphi d\varphi$, so erhalten wir:

$$\frac{3}{2} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \sqrt{z} dz = \varphi^2 + 4 \Big|_{\alpha}^{\alpha+2\pi} = (\alpha^2 + 4(\alpha\pi + \pi^2 + 1))^{\frac{3}{2}} - (\alpha^2 + 4)^{\frac{3}{2}}$$

Schöner geht's leider nicht mehr wirklich ...

34.3

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n$$

Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

Damit konvergiert die Reihe für alle $x \in (-1, 1)$. Bleiben noch die Grenzen dieses Intervalls zu betrachten, allerdings ist recht schnell ersichtlich, daß sie für $x \in \{-1, 1\}$ divergiert.

Bleibt die Reihensumme für die x im Konvergenzbereich zu ermitteln:

Sei

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot t^n$$

Dann gilt nach Satz 140:

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+1) \cdot t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \\ &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$f(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

34.4

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3 \cdot a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3} \cdot a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3} \cdot a = a$$

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot (n+1)^{n+1}}{(n+1)! \cdot n^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot (n+1)^n \cdot (n+1)}{n! \cdot (n+1) \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^{(n^2)}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n}$$

Da $|a| < 1$ geht dieser Grenzwert gegen ∞ . Damit existiert der Konvergenzradius nicht und die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3 \cdot 3^n - 2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n \left(3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \frac{1}{3}$$

34.5

(a)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4x^n}{n}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} 4x^{n-1} = 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 4 \cdot \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) - 1 \right) \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$f(x) = 4 \cdot \int_0^x \frac{1}{1-t} - 1 \, dt = -4 \cdot (\ln|1-x| + x)$$

(b)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^n$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (-x)^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \right) - 1 \\ &= \frac{1}{1+x} - 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt dann:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} - 1 \, dt = \ln|1+x| - x$$

(c)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (n+1) \cdot x^{n-1}$$

$$\int_0^x f(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot x^n$$

Verwenden wir hier das Ergebnis aus 34.3 wieder, so erhalten wir:

$$= \frac{1}{(1-x)^2} - 1$$

was uns am Ende auf

$$f(x) = \left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1 \right)' = \frac{-2}{(1-x)^3}$$

führt.