33.1

(a)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Subst.: $t := x+1$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < t < \infty$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty} \arctan x\,|_a^b = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty} (\arctan b - \arctan a)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

(b)

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$$

Subst.:: $t := -\frac{1}{x}$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$, $0 \le x < \infty$, $-\infty < t \le 0$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} e^t\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to-\infty} e^t\,\big|_a^0 = 1 - \lim_{a\to-\infty} e^a = 1$$

(c)

$$\int\limits_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to0}\,(x\cdot\ln x - x)\,|_a^1 = -1 - \lim_{a\to0} a\cdot\ln a = -1 - \lim_{a\to0}\frac{\ln a}{\frac{1}{a}}$$

$$\underset{l'H.}{=} -1 - \lim_{a\to0}\frac{a^2}{a} = -1$$

33.2

$$v_F = \sqrt{\frac{2}{m}\cdot\int\limits_{r_0}^{\infty} k\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}\mathrm{d}r} = \sqrt{\frac{2}{m}\cdot\lim_{a\to\infty}\int\limits_{r_0}^{a} k\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}\mathrm{d}r} = \sqrt{2\cdot k\cdot M\cdot\lim_{a\to\infty}\int\limits_{r_0}^{a}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r}$$

$$= \sqrt{2kM \cdot \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_0}^{a}} = \sqrt{2kM \cdot \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{r_0}} = \sqrt{\frac{2kM}{r_0}}$$

Sei nun $r_0 = \text{Erdradius} + 100\text{ km} = 6.470 \cdot 10^6\text{m}$:

$$v_F = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.668 \cdot 10^{-11} \cdot 5.973 \cdot 10^{24}\text{m}^3\text{ kg}}{6.470 \cdot 10^6\text{m kg s}^2}} \approx \sqrt{1.2312 \cdot 10^8 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}$$

$$\approx 11095.76\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

33.3

Der Körper ist begrenzt durch $x = 0$, $y = 0$, $y = -2x + 2$ sowie $z = x^2 + y^2$. Das führt uns auf eine dreieckige Grundfläche, über der ein Paraboloid aufgespannt ist. Allerdings nur im Oktanten, in dem x, y und z positiv sind. Wir erhalten damit folgendes Doppelintegral:

$$\int\int_G x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^{-\frac{y}{2}+1} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{3}\left(-\frac{y}{2}+1\right)^3 + y^2\left(-\frac{y}{2}+1\right) \mathrm{d}y$$

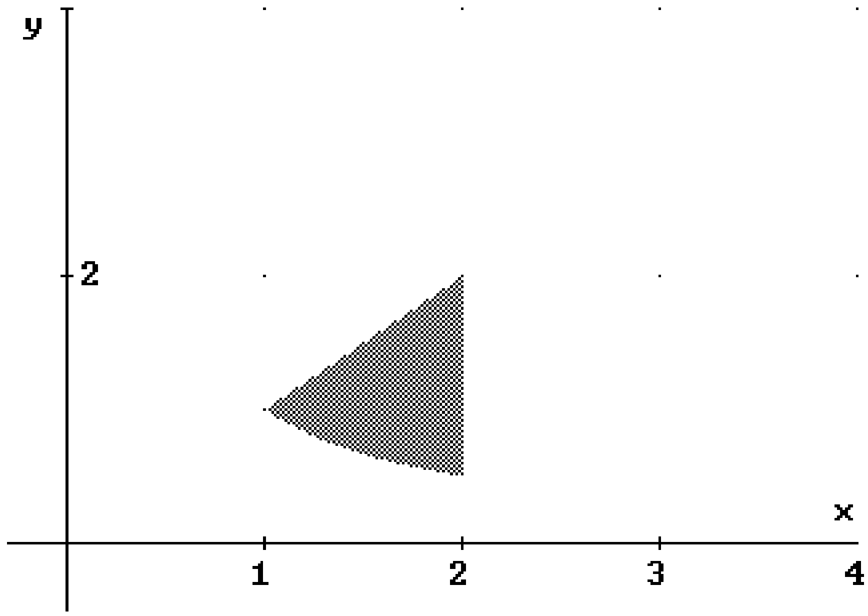
$$= \int_0^2 -\frac{13}{24}y^3 + \frac{5}{4}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}\,\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{13}{96}y^4 + \frac{5}{12}y^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{3}y\,\Big|_0^2 = \frac{5}{6}\text{ VE}$$

33.4

(a)

$$x = 2, y = x, y \cdot x = 1$$



Wir erhalten hier die folgenden Doppelintegrale:

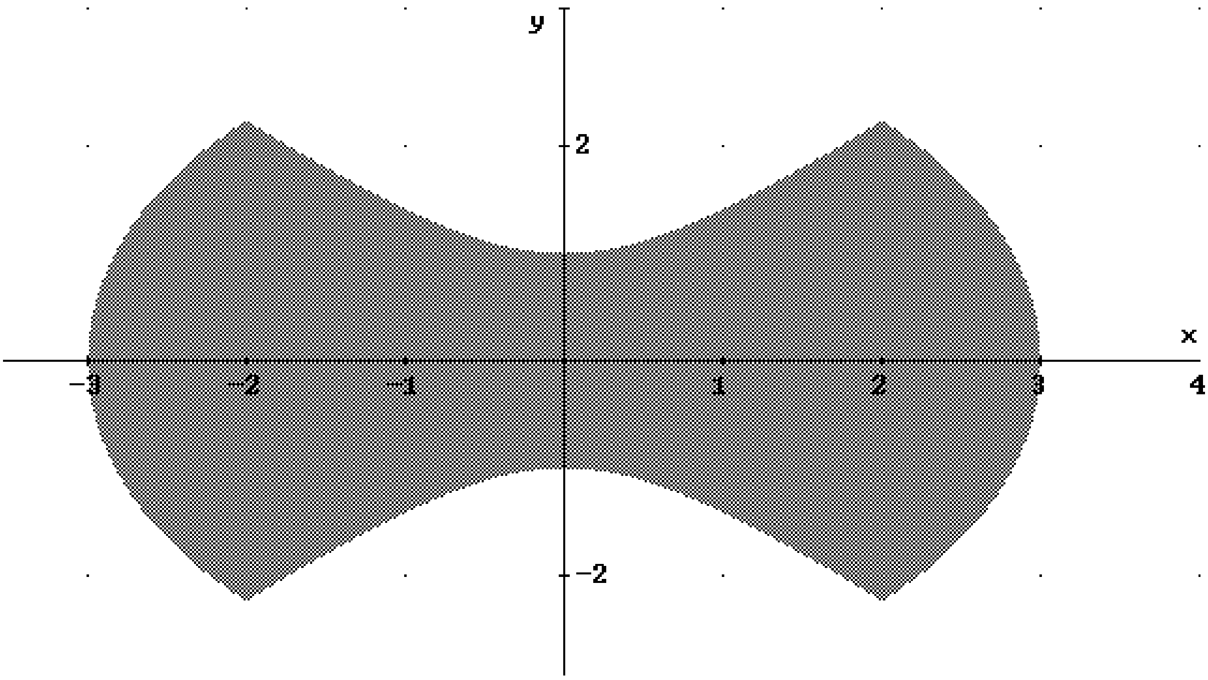
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{\frac{1}{y}}^{2} \cdots \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_{1}^{2} \int_{y}^{2} \cdots \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

sowie

$$\int_{1}^{2} \int_{\frac{1}{x}}^{x} \cdots \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

(b)

$$y^2 - x^2 = 1, x^2 + y^2 = 9$$



Hier ergibt sich einmal folgendes Doppelintegral:

$$\int_{-3}^{-2}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \cdots \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} \cdots \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \cdots \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

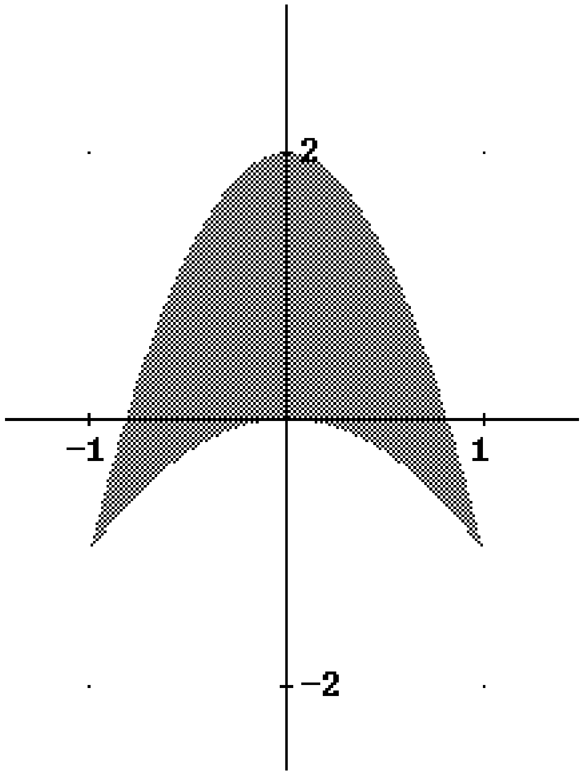
sowie die folgende Monstrosität von Widerlichkeiten:

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \cdots \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{-\sqrt{5}}^{-1}\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} \cdots \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{1}^{\sqrt{5}}\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} \cdots \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Also bei letzterem im Grunde ein breites Band aus der Mitte genommen, aus dem ich die Hyperbelteile heraussäbele.

33.5

Zunächst können wir uns die Fläche mal veranschaulichen:



Der Flächeninhalt läßt sich offenbar folgendermaßen berechnen:

$$F_G = \int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 2 - 3x^2 + x^2\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 2 - 2x^2\,\mathrm{d}x$$

$$= 2x - \frac{2}{3}x^3 \Big|_{-1}^{1} = \left(2 - \frac{2}{3}\right) - \left(-2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}\,\mathrm{FE}$$

Weiterhin benötigen wir

$$\int\int_G x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int_G x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\int_{-x^2}^{2-3x^2} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(xy\,\Big|_{-x^2}^{2-3x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} 2x - x^3\,\mathrm{d}x = x^2 - \frac{1}{4}x^4\,\Big|_{-1}^{1} = 0$$

sowie

$$\int\int_G y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int_G y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\int_{-x^2}^{2-3x^2} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(y^2\,\Big|_{-x^2}^{2-3x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(2 - 3x^2\right)^2 - \left(-x^2\right)^2 \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 4 - 12x^2 + 8x^4 \, \mathrm{d}x$$

$$= 4x - 4x^3 + \frac{8}{5}x^5 \Big|_{-1}^{1} = \left(4 - 4 + \frac{8}{5}\right) - \left(-4 + 4 - \frac{8}{5}\right) = \frac{16}{5}$$

Damit ergeben sich s_x und s_y folgendermaßen:

$$\begin{aligned} s_x &= \tfrac{3}{8} \cdot 0 = 0 \\ s_y &= \tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{16}{5} = \tfrac{6}{5} \end{aligned}$$