

32.1

Ich mache im Folgenden öfter von der sogenannten *linearen Substitution* Gebrauch, welche ein Spezialfall der normalen Substitution ist:

$$\int f(mx + n) dx = \frac{1}{m} F(mx + n) + C$$

Erspart mir aber im Folgenden ein wenig Schreibaufwand.

(a)

$$\int \sin(2x - 1) dx \underset{\substack{\text{lin.} \\ \text{Subst.}}}{=} -\frac{\cos(2x - 1)}{2} + C$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{1}{5x + 7} dx \underset{\substack{\text{lin.} \\ \text{Subst.}}}{=} \frac{\ln|5x + 7|}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5} (\ln 12 - \ln 7) = \frac{\ln \frac{12}{7}}{5} \approx 0.1078$$

(c)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x + 1}} dx &= \int \frac{(x + 1)^2}{\sqrt{x + 1}} dx = \int (x + 1)^{\frac{3}{2}} dx \\ &\underset{\substack{\text{lin.} \\ \text{Subst.}}}{=} \frac{2}{5} (x + 1)^{\frac{5}{2}} + C \end{aligned}$$

(d)

$$\int_0^2 \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx$$

Zunächst Substitution: $y := e^x$, $dy = e^x dx$, $x = \ln y$

$$= \int_1^{e^2} \frac{1 - y}{y(y + 1)} dy$$

Partialbruchzerlegung liefert uns:

$$\begin{aligned} &= \int_1^{e^2} \frac{1}{y} - \frac{2}{y+1} dy = (\ln y - 2 \cdot \ln(y+1)) \Big|_1^{e^2} = (2 - 2 \cdot \ln(e^2 + 1)) - (0 - 2 \cdot \ln 2) \\ &= 2 - 2 \cdot \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2}\right) \approx -0.8675\dots \end{aligned}$$

(e)

$$\int x \cdot \ln x dx$$

läßt sich partiell integrieren, mit folgenden Festlegungen:

$$u'(x) = x; \quad v(x) = \ln x$$

wodurch sich v' sowie u ergeben:

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2; \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x dx &= \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C \end{aligned}$$

(f)

$$\int_{-1}^1 \arctan x dx = \int_{-1}^1 \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\arctan x}_v dx = \left(\underbrace{x \cdot \arctan x}_{\text{part.}} - \underbrace{\int \frac{x}{x^2+1} dx}_{\text{Int.}} \right) \Big|_{-1}^1$$

Kurze Nebenrechnung für das verbleibende Integral:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot \frac{1}{x^2+1} dx$$

Substituieren wir nun $y := x^2 + 1$ und damit $dy = 2x dx$:

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \ln |y| = \frac{1}{2} \ln \underbrace{(x^2 + 1)}_{>0}$$

Damit erhalten wir für die Ausgangsfunktion:

$$\begin{aligned} \left(x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx \right) \Big|_{-1}^1 &= \left(x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) - \left(-\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = 0 \end{aligned}$$

(Was man eventuell auch schon dadurch hätte herausbekommen können, daß $\arctan x$ eine ungerade Funktion ist und damit die Fläche von -1 bis 0 exakt genauso groß ist, wie die Fläche von 0 bis 1 , nur beim Integrieren ein anderes Vorzeichen bekommt.)

32.2

Zunächst eine kleine Festlegung, die uns das Leben erleichtert:

$$\begin{aligned} f(t) &:= \frac{1}{1+t^5}; & \Phi(t) &:= \int f(t) dt \\ F(x) &:= \int_0^{x^3} f(t) dt \\ (F(x))'' &= \left(\int_0^{x^3} f(t) dt \right)'' \\ &= \left((\Phi(x^3) - \Phi(0))' \right)' = (\Phi'(x^3))' \underset{\text{Kettenr.}}{=} (f(x^3) \cdot 3x^2)' \\ &= \left(\frac{3x^2}{1+(x^3)^5} \right)' = \left(\frac{3x^2}{1+x^{15}} \right)' = \frac{6x(1+x^{15}) - 3x^2(15x^{14})}{(1+x^{15})^2} \end{aligned}$$

Da wir den Funktionswert an der Stelle $x = 1$ suchen:

$$(F(x))''(1) = \frac{6 \cdot 2 - 3 \cdot 15}{2^2} = -\frac{33}{4}$$

32.3

(a)

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{x}{(x+1)^2 + 1} dx$$

Subst.: $z := x + 1, dz = dx, x = z - 1$

$$= \int \frac{z-1}{z^2+1} dz = \int \frac{z}{z^2+1} dz - \int \frac{1}{z^2+1} dz$$

Nach dem in 32.1 (c) schon berechneten Integral:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \ln(z^2 + 1) - \arctan z + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) - \arctan(x + 1) + C \end{aligned}$$

(b)

$$\int \frac{1}{(x^2 + 4)^3} dx$$

Diese Aufgabe ist nach 14.3.3 vom Typ I_4 und geht damit mit Substitution $t := \frac{x}{\sqrt{4}} = \frac{x}{2}$ über in die Form

$$= \frac{1}{32} \cdot \underbrace{\int \frac{1}{(1+t^2)^3} dt}_{=: I(3)}$$

 $I(3)$ läßt sich nun rekursiv bestimmen:

$$\begin{aligned} = 2 \cdot I(3) &= \frac{1}{32} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot I(2) + \frac{t}{4(1+t^2)^2} \right) + C = \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot I(2) + \frac{t}{4(1+t^2)^2} \right) + C \\ &= \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot I(1) + \frac{t}{2(1+t^2)} \right) + \frac{t}{4(1+t^2)^2} \right) + C \\ &= \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \arctan t + \frac{t}{2(1+t^2)} \right) + \frac{t}{4(1+t^2)^2} \right) + C \end{aligned}$$

was sich vereinfacht zu

$$= \frac{3 \cdot \arctan t}{256} + \frac{t \cdot (3t^2 + 5)}{128 \cdot (t^2 + 1)^2} + C$$

Rücksubstitution führt uns dann auf

$$= \frac{3}{256} \arctan \frac{x}{2} + \frac{x \cdot (3x^2 + 20)}{128 \cdot (x^2 + 4)^2} + C$$

(c)

$$\int \frac{x^4}{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}$$

geht durch Partialbruchzerlegung über in

$$= \int \frac{\frac{81}{5}}{(x-3)^2} + \frac{\frac{459}{25}}{x-3} + \frac{\frac{16}{25}}{x+2} + x + 4 \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{16}{25} \ln(x+2) + \frac{459}{25} \ln(x-3) + \frac{81}{5} \int \frac{1}{(x-3)^2} dx$$

Mittels linearer Substitution (siehe 1.) können wir nun auch das letzte Integral auflösen:

$$= \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{16}{25} \ln(x+2) + \frac{459}{25} \ln(x-3) - \frac{81}{5} \cdot \frac{1}{x-3} + C$$

32.4

Zunächst müssen wir wissen, wo sich die Funktionen schneiden, um die Integrationsgrenzen zu ermitteln:

$$f(x) = g(x)$$

$$3x^2 - x^3 = 3 - x$$

$$-x^3 + 3x^2 + x - 3 = 0$$

Daraus ergeben sich die Schnittpunkte $(-1, f(-1))$, $(1, f(1))$ sowie $(3, f(3))$. Für unseren Flächeninhalt bedeutet dies:

$$A = \left| \int_{-1}^1 f(x) - g(x) \, dx \right| + \left| \int_1^3 f(x) - g(x) \, dx \right|$$

$$\int f(x) - g(x) \, dx = \int -x^3 + 3x^2 + x - 3 \, dx = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

Folglich:

$$A = \left| \left(-\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x \right) \Big|_{-1}^1 \right| + \left| \left(-\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x \right) \Big|_1^3 \right|$$

$$A = \left| -\frac{7}{4} - \frac{9}{4} \right| + \left| \frac{9}{4} - \left(-\frac{7}{4} \right) \right| = 4 + 4 = 8$$