

31.1

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

Zunächst bilden wir die partiellen Ableitungen:

$$f_x(x, y) = \frac{(2x)(x^2 + y^2 + 1) - (2x)(x^2 + y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{4y}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

Durch Gleichsetzen der partiellen Ableitungen mit 0 erhalten wir die extremwertverdächtige Stelle $x = y = 0$. Fehlen noch die weiteren Ableitungen für die hinreichende Bedingung:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{4 \cdot (3x^2 - y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{4 \cdot (x^2 - 3y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$$

Die Ableitungen sind stetig, daher gilt:

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{-16xy}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$$

$$f_{xx}(0, 0) \cdot f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2 = 4^2 - 0 = 16$$

Daraus folgt, daß $x = y = 0$ ein Extremwert ist, außerdem, da $f_{xx}(0, 0) > 0$, ist es ein relatives Minimum.

31.2

(a)

Zielfunktion: $f(x, y) = x \cdot y \rightarrow \text{Max.}$

Nebenbedingung: $x + y = \alpha \Rightarrow x = \alpha - y$

Daraus folgt für die Zielfunktion: $f(y) = -y^2 + \alpha y$

Die Extrema lassen sich dann recht einfach berechnen:

$$f'(y) = -2y + \alpha$$

$$-2y + \alpha = 0 \Rightarrow y = \frac{\alpha}{2}$$

Nach der Nebenbedingung gilt damit auch $x = \frac{\alpha}{2}$

$$f''(y) = -2$$

Damit ist $x = y = \frac{\alpha}{2}$ ein Maximum und man muß zur Zerlegung in zwei Zahlen x und y so anstellen, daß beide jeweils $\frac{\alpha}{2}$ sind. (Anschauung: Quadrat als Rechteck mit dem größten Flächeninhalt bei festem Umfang)

(b)

Zielfunktion: $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$

Nebenbedingung: $\alpha = x + y + z \Rightarrow z = \alpha - x - y \Rightarrow x + y + z - \alpha = 0$

Über die Lagrangesche Multiplikatorenregel läßt sich eine neue Zielfunktion aufstellen:

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda x + \lambda y + \lambda z - \lambda \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} F_x(x, y, z, \lambda) = yz + \lambda \\ F_y(x, y, z, \lambda) = xz + \lambda \\ F_z(x, y, z, \lambda) = xy + \lambda \\ F_\lambda(x, y, z, \lambda) = x + y + z - \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = yx \\ \lambda = xz \\ \lambda = xy \end{array} \right\} x = y = z$$

$$\Rightarrow \alpha = 3x \Rightarrow x = y = z = \frac{\alpha}{3}$$

Damit haben wir eine extremwertverdächtige Stelle bei $x = y = z = \frac{\alpha}{3}$

Nutzen wir die Nebenbedingung, läßt sich die Zielfunktion: zu einer zweistelligen Funktion umformen:

$$f(x, y) = x \cdot y \cdot (\alpha - x - y) = \alpha xy - x^2 y - xy^2$$

Für den Nachweis benötigen wir weitere Ableitungen:

$$f_x(x, y) = \alpha y - 2xy - y^2$$

$$f_y(x, y) = \alpha x - x^2 - 2xy$$

und daraus dann

$$f_{xx}(x, y) = -2y$$

$$f_{yy}(x, y) = -2x$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \alpha - 2x - 2y$$

Damit können wir prüfen, ob die Stelle ein Extremum ist:

$$f_{xx}\left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}\right) \cdot f_{yy}\left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}\right) - \left(f_{xy}\left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}\right)\right)^2 = \frac{5}{9}\alpha^2 > 0$$

Damit existiert an der Stelle ein Extremwert.

$$f_{xx}\left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}\right) < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

Folglich ist die optimale Aufteilung von α in drei Summanden eine gleichmäßige. (Anschauung: Würfel).