30.1

$f(x) = e^{1-x}$; $f'(x) = -e^{1-x}$; $f''(x) = e^{1-x}$; ...

$f(0) = e$; $f'(0) = -e$; $f''(0) = e$; ...

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot e}{n!} \cdot x^n$$

$$\Rightarrow f(x) = e - ex + \frac{ex^2}{2!} - \frac{ex^3}{3!} + R_3$$

$$= e - ex + \frac{ex^2}{2} - \frac{ex^3}{6} + \frac{e^{1-\vartheta x}}{24} \cdot x^4$$

(b)

$f(x) = \ln{(2+x)}$; $f'(x) = \frac{1}{2+x}$; $f''(x) = \frac{-1}{(2+x)^2}$

$f(0) = \ln 2$; $f'(0) = \frac{1}{2}$; $f''(0) = -\frac{1}{4}$; $f'''(0) = \frac{1}{4}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + R_3$$

$$= \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{4(2+\vartheta x)^4}$$

30.2

(a)

$\sqrt{a-2x}$ geht durch Substitution $z := -2x$ über in $\sqrt{1+z}$ bzw. $(1+z)^{\frac{1}{2}}$. Damit haben wir für Binomi $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot z^n$$

Da $|z| < 1$ nach Voraussetzung: $|-2x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{2}$.

(b)

$\frac{4}{\sqrt{2+8x}} = 4 \cdot (2+8x)^{-\frac{1}{2}} = 4 \cdot (2 \cdot (1+4x))^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \cdot (1+4x)^{-\frac{1}{2}}$

Was folgt, ist mehr oder weniger das gleiche Spielchen wie bei (a):

Subst.: $z := 4x$

$$\frac{4}{\sqrt{2+8x}} = 2\sqrt{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \cdot z^n$$

Damit: $1 > |z| = |4x| \Rightarrow |x| < \frac{1}{4}$.

30.3

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

$x = \frac{\pi}{18}$

$$\left| \cos x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} \right| = |R_{2n}| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(n+1)!} < 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1} < 10^{-5}$$

$$\Rightarrow (2n+1)(\log_{10}\pi - \log_{10}18) < -5$$

$$n > 2.79$$

Das führt uns auf:

$$\cos\frac{\pi}{18} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{18}\right)^2 + \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{\pi}{18}\right)^4 = 0.984807\ldots$$

30.4

gesucht: $\sqrt[3]{9}$ auf 8 Stellen nach dem Komma

Umformen: Wähle $\frac{a}{b} = \frac{21}{10}$ $\left(\left(\frac{21}{10}\right)^3 = \frac{9261}{1000} = 9.261\right)$

Damit:

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{\left(\frac{21}{10}\right)^3 \cdot 9 \cdot \left(\frac{10}{21}\right)^3} = \frac{21}{10} \cdot \left(\frac{1000}{1029}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{21}{10} \cdot \left(\frac{1029}{1000}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{21}{10} \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{29}{1000}}_{=:x}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{21}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{n} \cdot x^n$$

Wir erhalten eine Näherung auf 8 Stellen nach dem Komma schon für

$$\frac{21}{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + \frac{35}{243}x^4\right) = 2.08008382...$$

Mit dem Newton-Verfahren ließe sich diese Aufgabe lösen, indem man sich eine Funktion konstruiert, die an der Stelle $\sqrt[3]{9}$ eine Nullstelle besitzt. Anwenden kann man dies auf folgende Iterationsvorschrift:

$$x_0 \text{ wählen}$$

$$x_{n+1} := \frac{1}{3}\left(\frac{9}{x_n^2} + 2x_n\right)$$

30.5

$$f(x, y) := \ln \left|\frac{\sqrt{y}}{x^2}\right|$$

Da nach Voraussetzung $x \neq 0$ sowie $y > 0$ gilt, kann man die Betragsstriche bedenkenlos weglassen, da der Term innerhalb selbiger nie kleiner als 0 wird:

$$= \ln \frac{\sqrt{y}}{x^2} = \ln \sqrt{y} - \ln x^2 = \frac{1}{2}\ln y - 2\ln x$$

Hiermit sind die Ableitungen dann eigenltich schon zu sehen:

$$f_x(x, y) = -\frac{2}{x}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2y}$$

30.6

(a)

$$u(x,y,z) := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$u_x(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u_y(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u_z(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Das führt uns zu der Gleichung

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = n \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Daraus folgt: $n = 1$

(b)

Hier mache ich für die Einfachheit der Darstellung zunächst zwei Substitutionen:

$a := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$b := x+y+z$

Unsere Grundfunktion $u(x,y,z)$ sieht dann folgendermaßen aus:

$$u(x,y,z) = \sin\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sin\frac{b}{a}$$

Die Ableitungen ergeben sich dann auch recht einfach:

$$u_x(x,y,z) = \cos\frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a^2-bx}{a^3}\right)$$

$$u_y(x,y,z) = \cos\frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a^2-by}{a^3}\right)$$

$$u_z(x,y,z) = \cos\frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a^2-bz}{a^3}\right)$$

Damit erhalten wir die Gleichung:

$$\sin\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{x\big(a^2-bx\big)}{a^3}+\frac{y\big(a^2-by\big)}{a^3}+\frac{z\big(a^2-bz\big)}{a^3}\right)=n\cdot\sin\frac{b}{a}$$

und somit

$$\frac{x\big(a^2-bx\big)+y\big(a^2-by\big)+z\big(a^2-bz\big)}{a^3}=n$$

$$\frac{x\big(y^2+z^2-x(y+z)\big)+y\big(x^2+z^2-y(x+z)\big)+z\big(x^2+y^2-z(x+y)\big)}{a^3}=n$$

$$xy^2+xz^2-x^2y-x^2z+x^2y+yz^2-xy^2-y^2z+x^2z+y^2z-xz^2-yz^2=a^3\cdot n$$

$$0=a^3\cdot n\Rightarrow n=0$$

30.7 (W)

$$\mathfrak{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&1\\0&2&-9\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\0&2&-9&0&0&1\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&1&-5&-2&1&0\\0&0&1&4&-2&1\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11&6&-3\\0&1&0&18&-9&5\\0&0&1&4&-2&1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}-11&6&-3\\18&-9&5\\4&-2&1\end{pmatrix}$$

Proberechnung: $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}^{-1}$

$$\begin{array}{rrr|rrr}&&&1&0&3\\&&&2&1&1\\&&&0&2&-9\\\hline -11&6&-3&1&0&0\\18&-9&5&0&1&0\\4&-2&1&0&0&1\end{array}$$

Die Matrixgleichung

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{X}=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&0&1\\1&-2&5\end{pmatrix}$$

läßt sich ähnlich lösen; durch Umformung kommt man auf

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 8 & -44 \end{pmatrix}$$