

29.1

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{\tan x}$$

Dieser Grenzwert ist von der Form „ $\frac{0}{0}$ “. Folglich können wir die Regel von l'Hospital problemlos anwenden:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot \ln a - b^x \cdot \ln b}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x \cdot \ln a - b^x \cdot \ln b) \cdot \cos^2 x}{1} = \ln a - \ln b$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x \cdot (e^x - 1)} \stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x \cdot e^x + e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x(x + 1) - 1}$$

Hiermit haben wir wieder den Pseudoterm „ $\frac{0}{0}$ “

$$\stackrel{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + xe^x + e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{2}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{x}}$$

Dieser Term ist nun von der Form „ $\frac{0}{0}$ “, womit wir l'Hospital anwenden dürfen:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x^2}{x-1} + \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{x^2 - 1} = -2$$

29.2

$$\begin{aligned}
 h &= m \cdot \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(a\sqrt{c}) + b\sqrt{c} \cdot \sin(a\sqrt{c}))}{c} \\
 &\stackrel{\text{l'H.}}{=} m \cdot \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\frac{-a}{2\sqrt{c}} \sin(a\sqrt{c}) + \frac{b}{2\sqrt{c}} \cdot \sin(a\sqrt{c}) + \frac{ab\sqrt{c} \cdot \cos(a\sqrt{c})}{2\sqrt{c}}}{\cos(a\sqrt{c}) + b\sqrt{c} \cdot \sin(a\sqrt{c})} \\
 &= m \cdot \frac{\lim_{c \rightarrow 0} \frac{-a}{2\sqrt{c}} \sin(a\sqrt{c}) + \frac{b}{2\sqrt{c}} \cdot \sin(a\sqrt{c}) + \frac{ab\sqrt{c} \cdot \cos(a\sqrt{c})}{2\sqrt{c}}}{\lim_{c \rightarrow 0} \cos(a\sqrt{c}) + b\sqrt{c} \cdot \sin(a\sqrt{c})} \\
 &= m \cdot \lim_{c \rightarrow 0} \frac{-a}{2\sqrt{c}} \sin(a\sqrt{c}) + \frac{b}{2\sqrt{c}} \cdot \sin(a\sqrt{c}) + \frac{ab \cdot \cos(a\sqrt{c})}{2} \\
 &= m \cdot \left(\frac{ab}{2} + \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\sin(a\sqrt{c}) \cdot (b-a)}{2\sqrt{c}} \right) \\
 &\stackrel{\text{l'H.}}{=} m \cdot \left(\frac{ab}{2} + \lim_{c \rightarrow 0} \frac{(b-a) \cdot \cos(a\sqrt{c}) \cdot \frac{a}{2\sqrt{c}}}{\frac{1}{\sqrt{c}}} \right) = m \cdot \left(\frac{ab}{2} + \lim_{c \rightarrow 0} \frac{(b-a) \cdot \cos(a\sqrt{c}) \cdot a}{2} \right) \\
 &= m \cdot \left(\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = m \cdot \left(ab - \frac{a^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Nun können wir a und b wieder zurücksostituieren:

$$\begin{aligned}
 h &= m \cdot \left(ab - \frac{a^2}{2} \right) = m \cdot \left(\sqrt{\frac{g}{m}} \cdot t \cdot v_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{m \cdot g}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{m} \cdot t^2 \right) \\
 &= \frac{m \cdot \sqrt{g} \cdot t \cdot v_0}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt{g}} - \frac{m}{2} \cdot \frac{g}{m} \cdot t^2 = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2
 \end{aligned}$$

29.3

Behauptung. $f^{(n)}(x) = \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$

Beweis.

Induktionsanfang: $n = 1$

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$$

gilt offenbar.

Induktionsbehauptung: $n + 1$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{2 \cdot (n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Induktionsschluß:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x) \right)' = \left(\frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}} \right)' = 2 \cdot n! \cdot \left((1-x)^{-(n+1)} \right)'$$

$$= 2 \cdot n! \cdot (-(n+1)) \cdot (-1) \cdot (1-x)^{-(n+2)} = \frac{2 \cdot (n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

□

29.4

(a)

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$f'(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$f''(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$f'''(x) = \cosh x$$

Scheint also immer zwischen $\sinh x$ und $\cosh x$ zu alternieren. Da sich das schlecht schreibt, habe ich die Repräsentation der beiden Funktionen über e^x gewählt:

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x - (-1)^n \cdot e^{-x}}{2}$$

(b)

$$f(x) = x \cdot e^x = e^x(0 + x)$$

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x)$$

$$f''(x) = e^x + e^x + x \cdot e^x = e^x(2 + x)$$

$$f'''(x) = e^x(3 + x)$$

Daraus kann man dann folgende Gleichung für die n -te Ableitung ableiten:

$$f^{(n)}(x) = e^x(n + x)$$

(c)

$$f(x) = (1 + 2x)^{-1}$$

$$f'(x) = -2 \cdot (1 + 2x)^{-2}$$

$$f''(x) = 8 \cdot (1 + 2x)^{-3}$$

$$f'''(x) = -48 \cdot (1 + 2x)^{-4}$$

Behauptung.

$$f^{(n)}(x) = (-2)^n \cdot n! \cdot (1 + 2x)^{-(n+1)}$$

*Beweis.***Induktionsanfang:** $n = 0$

$$f^{(0)}(x) = (1 + 2x)^{-1}$$

Induktionsvoraussetzung: $n = k$

$$f^{(k)}(x) = (-2)^k \cdot k! \cdot (1 + 2x)^{-(k+1)} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

Induktionsbehauptung: $n + 1$

$$f^{(n+1)}(x) = (-2)^{n+1} \cdot (n + 1)! \cdot (1 + 2x)^{-((n+1)+1)}$$

Induktionsschluß:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x) \right)' = \left((-2)^n \cdot n! \cdot (1 + 2x)^{-(n+1)} \right)' \\ &= (-2)^n \cdot n! \cdot (-(n + 1)) \cdot 2 \cdot (1 + 2x)^{-(n+2)} \\ &= (-2)^n \cdot (-2) \cdot n! \cdot (n + 1) \cdot (1 + 2x)^{-((n+1)+1)} \\ &= (-2)^{n+1} \cdot (n + 1)! \cdot (1 + 2x)^{-((n+1)+1)} \end{aligned}$$

□

29.5

$$f(x) = \sinh x$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x - (-1)^n \cdot e^{-x}}{2}$$

$$\sinh 0 = 0, \quad \cosh 0 = 1$$

Daraus folgt die Taylor-Reihenentwicklung für $\sinh x$ (sogar eine MacLaurin-Reihe):

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)!} \cdot x^{2n+1}$$

Beweis. Zu zeigen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

Restglied von Lagrange:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(\vartheta x) = \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{=0 \text{ nach VL}} \cdot \underbrace{\frac{e^{\vartheta x} - (-1)^{n+1} \cdot e^{\vartheta x}}{2}}_{=0 \text{ bzw. konst.}} = 0$$

□

29.6 (W)

(a)

Die Determinante ist 0, da eine komplette Spalte derselbigen nur aus Nullen besteht. (Satz 31)

(b)

Hier sind die erste und dritte Zeile identisch, wodurch sich der Wert der Determinante auf 0 festlegt. (Satz 33a)

(c)

Hier läßt sich die erste Zeile als Summe der zweiten und dritten Zeile darstellen, was wiederum bestimmt, daß die Determinante 0 sein muß. (Sätze 35 und 33a)

$$A := \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-2 - 6) - 3 \cdot (-2 - 6 - 2) + 1 \cdot (6 - 6 - 6) = 16$$