27.1

(a)

$$\frac{2x^3 - 12x^2 + 20x - 2}{x^2 - 6x + 9}$$

Zunächst mache ich eine Polynomdivision, sowie Linearfaktorzerlegung des Nenners:

$$\frac{2x^3 - 12x^2 + 20x - 2}{x^2 - 6x + 9} = 2x + \frac{2x - 2}{(x-3)^2}$$

Das führt uns für die Partialbruchzerlegung des Bruches auf folgendes:

$$\frac{2x-2}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

$$2x - 2 = A \cdot (x - 3) + B$$

$$2x - 2 = A \cdot x + (-3A + B)$$

Daraus erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} A &= 2 \\ -3A + B &= -2 \end{aligned}$$

und somit $A = 2, B = 4$, was uns zu der endgültigen Zerlegung führt:

$$\frac{2x^3 - 12x^2 + 20x - 2}{x^2 - 6x + 9} = 2x + \frac{2}{x-3} + \frac{4}{(x-3)^2}$$

(b)

$$\frac{5x^2 - 7x + 20}{x^3 - 3x^2 + 12x - 10} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 10}$$

Daraus folgt:

$$A\left(x^2 - 2x + 10\right) + (Bx + C)(x - 1) = 5x^2 - 7x + 20$$

Für $x = 1$:

$$\begin{aligned} A \cdot (1 - 2 + 10) &= 5 - 7 + 20 \\ A &= 2 \end{aligned}$$

Setzen wir das nun ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 20 + (Bx + C)(x - 1) &= 5x^2 - 7x + 20 \\ Bx^2 - Bx + Cx - C &= 3x^2 - 3x \end{aligned}$$

Durch das x^2 wird $B = 3$ erzwungen, was direkt auf $C = 0$ führt. Womit wir dann die endgültige Zerlegung erhalten:

$$\frac{5x^2 - 7x + 20}{x^3 - 3x^2 + 12x - 10} = \frac{2}{x-1} + \frac{3x}{x^2 - 2x + 10}$$

27.2

(a)

Unstetigkeitsstellen sind offenbar $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{1}{x+2} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{1}{x+2} = \infty$$

Damit ist $x_1 = -2$ eine Unstetigkeitsstelle 2. Art.

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

Gleiches gilt auch für den rechtsseitigen Grenzwert, womit $x_2 = 2$ eine hebbare Unstetigkeitsstelle darstellt, da $f(2) \notin D(f)$.

(b)

Nullstelle der Nennerfunktion und damit Unstetigkeitsstelle ist lediglich $x = 2$:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{x}{(x-2)^3} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{x}{(x-2)^3} = \infty$$

Somit erhalten wir hier eine Unstetigkeitsstelle 2. Art.

(c)

$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x} & \text{für} \quad x > 0 \\ x^2 & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases}$ hat offenbar bei $x = 0$ eine Unstetigkeitsstelle.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x^2 = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin 3x}{x} - 2 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{3 \cdot \sin x}{x} - \frac{4 \cdot \sin^3 x}{x} \right) - 2 = 3 \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} - 4 \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{(\sin x)^3}{x} - 2$$

$$= 3 - 4 \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} \cdot (\sin x)^2 - 2 = 3 - 0 - 2 = 1$$

Alternative: Substitution $z := 3x$, damit

$$3 \cdot \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} - 2 = 1$$

Folglich ist $x = 0$ eine Unstetigkeitsstelle 1. Art.

27.3

(a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - e^{6x}}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{4x}}{4x} - \frac{e^{6x}}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - 1}{4x} - \frac{e^{6x} - 1}{4x}$$

$$\underset{\substack{\text{Subst.} \\ z := 4x}}{=} \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} - \lim_{x \to 0} \frac{e^{6x} - 1}{4x} = 1 - \lim_{x \to 0} \frac{e^{6x} - 1}{4x}$$

$$= 1 - \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{e^{6x} - 1}{6x} \underset{\substack{\text{Subst.} \\ z := 4x}}{=} 1 - \frac{3}{2} \cdot \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = -\frac{1}{2}$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{3x}+2^x+5}{5\cdot 2^{3x}-2^x} \underset{\substack{\text{Subst.}\\ z:=2^x}}{=} \lim_{z\to\infty} \frac{z^3+z+5}{5z^3-z} = \lim_{z\to\infty} \frac{1+\frac{1}{z^2}+\frac{5}{z^3}}{5-\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{5}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\sin x + \sin x\cdot\cos x} \overset{\text{Trig. Pyth.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x\cdot(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+\cos x} = 0$$

27.4

(a)

$f_1(x) = (\cos x - \sin x)\cdot e^x$

$f_1' = (\cos x - \sin x)\cdot e^x + (-\cos x - \sin x)\cdot e^x = -2e^x \sin x$

Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

(b)

$f_2(x) = \frac{\cosh x}{e^x} = \frac{e^x+e^{-x}}{2e^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}$

$f_2'(x) = -e^{-2x}$

Die Funktion ist ebenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

(c)

$f_3(x) = \ln\sqrt{4x-x^2} = \ln\left(4x-x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(4x-x^2\right)$

$f_3'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4x-x^2}(-2x+4) = \frac{2-x}{4x-x^2}$

Die Funktion ist für alle $x \in (0,4) \subset \mathbb{R}$ mit differenzierbar.

(d)

$f_4(x) = 4\cdot\sqrt{x^2+\sqrt{x}} = 4\cdot\left(x^2+(x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$f_4'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + \sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{4x + x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}$

Ist differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$.