

26.1

(a)

$$(a_n) = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} = 1 + 0 = 1$$

Damit existiert der Grenzwert, womit die Folge konvergent ist.

(b)

$$(b_n) = (n \bmod 2) \frac{4}{n} + ((n+1) \bmod 2) \frac{4n+4}{n}$$

Diese Folge besteht essentiell aus zwei Folgen, die sich gegenseitig abwechseln:

$$\begin{aligned} (b'_n) &= \frac{4}{n} \\ (b''_n) &= \frac{4n+4}{n} = 4 + \frac{4}{n} \end{aligned}$$

Wie leicht ersichtlich ist, strebt (b'_n) gegen 0 und (b''_n) gegen 4. Damit konvergiert die Folge (b_n) nicht, da sie auch im Unendlichen immer zwischen 0 und 4 alternieren würde.

26.2

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 10}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} + \frac{10}{2^n} = 0 + 0 = 0$$

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n-7} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-7} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-7} = e^3 \end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2n) - (n^2 - 2n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - 2n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n}} \right)} = 2$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n} \right)^8 = (1 + 0)^8 = 1$$

(e)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+2} \right)^{n+5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + \frac{3}{2}}{n+1} \right)^{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{2n}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{2n}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^5 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{2n}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n \cdot 1 = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n} \right)^n}{e} \end{aligned}$$

Nun substituieren wir $z := \frac{2}{3}n$:

$$\frac{\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{\frac{3}{2}z}}{e} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e} = \sqrt{e}$$

26.3

Zunächst suchen wir uns eine Zahlenfolge, die uns für die n . in der Aufgabe beschriebene Konstruktion den Flächeninhalt des gepunkteten Bereiches liefert. Offensichtlich ist der Flächeninhalt des Dreiecks ohne ein eingezeichnetes Quadrat $\frac{a^2}{2}$. Mit einem eingezeichneten Quadrat halbiert er sich, mit den nächsten eingezeichneten Quadraten wieder, und so weiter. Damit erhalten wir folgende Bildungsvorschrift für die Zahlenfolge:

$$a_n = \frac{a^2}{2^{n+1}}$$

2^{n+1} deswegen, weil das n den Zähler der beschriebenen Konstruktion (das Einzeichnen der Quadrate) darstellt und für $n = 1$ ja der Flächeninhalt schon $\frac{a^2}{4}$ beträgt.

Nun soll der Flächeninhalt der n . Konstruktion kleiner als 1 % des ursprünglichen Flächeninhalt werden:

$$\frac{a^2}{2^{n+1}} < \frac{a^2}{200}$$

Oder anders aufgeschrieben:

$$200 < 2^{n+1}$$

Das ist für $n \geq 7$ der Fall. Damit muß man die Konstruktion also 7 mal wiederholen, um einen Flächeninhalt kleiner als 1 % des Dreiecksinhaltes zu erhalten.

26.4

Die Folge

$$a_n := 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{2}{3^n} + \frac{2^2}{3^n} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

läßt sich mit ein wenig Nachdenken eleganter aufschreiben:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{3^n}$$

Nun haben wir eine Folge, die eine Reihe mit einschließt. Nicht sehr nett das ganze, aber wir sind ja noch nicht am Ende. $\frac{1}{3^n}$ ist in der Summe konstant, also kann man das auch ausklammern:

$$a_n = 1 + \frac{1}{3^n} \left(1 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1}\right)$$

Und eine weitere Vereinfachung fällt auf: Die Summe aller Zweierpotenzen von 2^0 bis 2^{n-1} ist immer $2^n - 1$. Leicht auszuprobieren oder man veranschaulicht sich das mit Bits, wie auch immer. Wir erhalten dann folgende Bildungsvorschrift:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{2^n - 1}{3^n} = 1 + \frac{2^n}{3^n} \\ &= 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Nun können wir den Grenzwert hinreichend trivial bestimmen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + 0 = 1$$

Damit konvergiert die Folge.

Die Menge der Folgenglieder außerhalb einer Umgebung von $\frac{1}{10}$ um 1 läßt sich nun auch recht einfach bestimmen. Wir sehen leicht aus der Bildungsvorschrift, daß sich die Folge von oben an ihren Grenzwert von 1 annähert, womit wir durch geeignete Wahl der Formel auch die Betragsstriche loswerden:

$$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 > \frac{1}{10}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n > \frac{1}{10}$$

$$n \cdot \ln \frac{2}{3} > \ln \frac{1}{10}$$

$$n < \frac{\ln \frac{1}{10}}{\ln \frac{2}{3}}$$

$$n < 5.67\dots$$

Damit gibt es lediglich fünf Zahlenfolglieder, die zum Grenzwert eine Differenz größer $\frac{1}{10}$ aufweisen. Die Folglieder, die damit außerhalb der 10%-Grenze liegen, wären:

$$a_1 = \frac{5}{3}; a_2 = \frac{13}{9}; a_3 = \frac{35}{27}; a_4 = \frac{97}{81}; a_5 = \frac{275}{243}$$

26.5

(a)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+9}}$: Hier kann man als Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ wählen, diese als *harmonische Reihe* bekannte Reihe ist bekanntermaßen divergent, was uns dazu führt, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+9}}$ ebenfalls divergiert.

(b)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$ läßt sich mittels des Quotientenkriteriums auf Konvergenz prüfen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot n! \cdot (n+1)^{n+1}}{n^n \cdot 3^{n+1} \cdot (n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n \cdot 3 \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right)^n = \frac{e}{3} \end{aligned}$$

$\frac{e}{3}$ ist kleiner als 1, nach Satz 119 ist die Reihe damit konvergent.

(c)

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{2n}$ läßt sich nach dem Leibniz-Kriterium behandeln. Alternierend ist die zugrundeliegende Folge recht offensichtlich, bleibt nur noch zu zeigen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n}$ gegen 0 strebt, was es allerdings nicht tut, wie man recht schnell sieht. Kurze Umformung und Grenzwertübergang:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

Damit ist es keine Nullfolge, folglich divergiert die Reihe.

(d)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n + n^2)}{3^n}$ läßt sich dank hübscher Eigenschaften des Sinus nach oben bzw. unten folgendermaßen abschätzen:

nach oben: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

nach unten: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Da sowohl obere als auch untere Abschätzung offenbar konvergieren (geometrische Reihe), konvergiert die Folge ebenso.

(e)

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{5n}{(n+1)^2}$: Hier böte sich wieder Leibniz an. Die Reihe alterniert, also bleibt nur noch die Frage nach dem Grenzwert der restlichen Folge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n\left(n+2+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+2+\frac{1}{n}} = 0$$

Weiterhin muß die Folge monoton fallen, dazu betrachte ich die Differenz $a_n - a_{n+1} > 0$:

$$\frac{5n}{(n+1)^2} - \frac{5n+5}{(n+2)^2} > 0$$

$$\frac{(5n^3 + 20n^2 + 20n) - (5n^3 + 15n^2 + 15n + 5)}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{5n^2 + 5n - 5}{(n+1)^2(n+2)^2} > 0$$

Damit konvergiert die Folge.

26.6

Scheint entweder nicht vorhanden zu sein oder ziemlich unsichtbar gedruckt.

26.7

Zunächst brauchen wir eine hübschere Repräsentation der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n + 3}{2} \right) \cdot a^n = \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n + 3) \cdot \frac{a^n}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n + 3a^n}{2}$$

Ich denke aber fast, zum Rechnen wird die zweite Repräsentation am einfachsten sein.

(a)

$$\frac{\left((-1)^{n+1} + 3 \right) \cdot a^{n+1}}{2} \cdot \frac{2}{\left((-1)^n + 3 \right) \cdot a^n} = \frac{\left((-1)^{n+1} + 3 \right) \cdot a}{(-1)^n + 3}$$

Wir haben nun zwei Möglichkeiten, wie $\frac{((-1)^{n+1}+3)}{(-1)^n+3}$ aussieht. Das Konstrukt ist ja so gestaltet, daß es immer zwischen zwei Werten abwechselt, hier sind es $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ oder $\frac{4}{2} = 2$. Was uns zu zwei Ausdrücken führt, nämlich entweder $\frac{a}{2}$ oder $2a$, die wir kleiner als 1 bekommen müssen, damit die Reihe konvergiert:

$$\frac{a}{2} < 1 \Rightarrow a < 2$$

$$2a < 1 \Rightarrow a < \frac{1}{2}$$

Damit benötigen wir $a < \frac{1}{2}$, damit die Reihe konvergiert. Wir müssen hier das engere Kriterium wählen, da sonst ja nur ein Teil der Werte zu Konvergenz führen könnte.

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{(-1)^n + 3}{2} \right) \cdot a^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n + 3}{2} \cdot a} = a$$

Die n . Wurzel aus $\frac{1}{2}$ oder 2 ist für n gegen ∞ definitiv 1. Womit wir nun nur noch versuchen müssen, $a < 1$ zu erfüllen, was sich in sich selbst schon beantwortet.

Und wie prophezeit, deckt das Wurzelkriterium hier einen größeren Wertebereich für a ab, als das Quotientenkriterium.