24.1

Das Gleichungssystem der Nebenbedingungen braucht zunächst eine zusätzliche Variable, um das $\leq$ loszuwerden, gleichzeitig können wir durch Negation die -4 in der Ergebnisspalte positivieren (oder so):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ich sehe keine sinnvolle Möglichkeit, in dem LGS die letzte Spalte der Einheitsmatrix durch arithmetische Umformungen zu erzeugen, also führe ich eine weitere Variable x_5 ein, welche in der Zielfunktion einen Koeffizienten bekommt, der beliebig groß sein darf und den ich hier mit τ bezeichne (scheint aber eine solche Möglichkeit zu geben, naja,was soll's – ein etwas komplexeres Problem wird mich wohl auch nicht umbringen [hoffe ich zumindest]). Womit wir das folgende LOP erhalten (ZF auch gleich zu einem Minimum umgewandelt):

$$f'(\mathfrak{x}) = (-1, 1, 4, 0, \tau)^T \cdot \mathfrak{x} \quad \longrightarrow \quad \text{Min.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{x} \geq \mathfrak{o}$$

Nun können wir das ganze auch lösen:

		x_2	x_3			
	-1	1	4	0		
x_1	-1	1	2	4	4	
x_4	0	3	0	6	2	
x_5	τ	1	-1	1	1	$i = 5$
		> 0	< 0			
		$j = 2$				

		x_5	x_3			
	-1	τ	4	0		
x_1	-1	-1	3	3		
x_4	0	-3	3	3		
x_2	1	1	-1	1		
		< 0	-8	-2		

Somit ist die Ecke $\mathfrak{x} = (3, 1, 0, 3)^T$ eine Lösung des LOP mit dem Minimum der Zielfunktion von -2.

24.2

Die vorgegebenen Vertauschungen sorgen schon mal dafür, daß hinterher die gleichen Basis- und Nichtbasisvariablen da stehen wie am Anfang. Ob es dafür 10 Punkte geben würde, stelle ich allerdings in Frage und rechne mal brav daran herum:

$$f(\mathfrak{x}) = (0, 0, -1, 1, -1, 1, 0)^T \cdot \mathfrak{x} \longrightarrow \text{Min.}$$

		x_3	x_4	x_5	x_6			
	-1	-1	1	-1	1	0		
x_1	0	1	-2	-3	4	0	0	$i = 1$
x_2	0	4	-3	-2	1	0	0	
x_7	0	1	1	1	1	1	1	
		1	-1	1	-1	0		
		$j = 3$						

		x_1	x_4	x_5	x_6			
	-1	0	1	-1	1	0		
x_3	-1	1	-2	-3	4	0	0	
x_2	0	-4	5	10	-15	0	0	$i = 2$
x_7	0	-1	3	4	-3	1	$\frac{1}{3}$	
		-1	1	2	-5	0		
			$j = 4$					

		x_1	x_2	x_5	x_6			
	-1	0	0	-1	1	0		
x_3	-1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	-2	0	0	$i = 3$
x_4	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	2	-3	0	0	
x_7	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{3}{5}$	-2	6	1	$-$	
		$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	2	-2	0		
				$j = 5$				

		x_1	x_2	x_3	x_6			
	-1	0	0	-1	1	0		
x_5	-1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	-2	0	$-$	
x_4	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	-2	1	0	0	$i = 4$
x_7	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	2	2	1	$\frac{1}{2}$	
		1	-1	-2	2			
					$j = 6$			

\o/ Hooray, stimmt überein. Zumindest bis hierher kein Fehler oder mehrere solche, die sich gegenseitig aufheben ...

		x_1	x_2	x_3	x_4			
	-1	0	0	-1	1	0		
x_5	-1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	-3	2	0	0	$i = 5$
x_6	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	-2	1	0	0	
x_7	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{7}{5}$	6	-2	1	$-$	
		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	2	-2	0		
		$j = 1$						

		x_5	x_2	x_3	x_4			
	-1	-1	0	-1	1	0		
x_1	0	5	-4	-15	10	0	$-$	
x_6	1	-2	1	4	-3	0	0	$i = 6$
x_7	0	3	-1	-3	4	1	$-$	
		-1	1	5	-4	0		
			$j = 2$					

		x_5	x_6	x_3	x_4		
	-1	-1	1	-1	1	0	
x_1	0	-3	4	1	-2	0	
x_2	0	-2	1	4	-3	0	
x_7	0	1	1	1	1	1	

Wie ersichtlich ist, ist dies die gleiche Konfiguration wie zu Beginn, nur die Spalten mitsamt ihrer Nichtbasisvariablen sind ein wenig umsortiert worden.

(Und eine Frage am Rande: Wäre aufgefallen, wenn ich diese einfach von oben abgeschrieben hätte statt sie auszurechnen? ;)

24.3

		x_4	x_5			
	-1	3	8	0		
x_1	1	-7	6	10	$\frac{5}{3}$	
x_2	-1	3	-12	0	$-$	
x_3	2	-3	3	3	1	$i = 3$
		-19	16	16		
			$j = 5$			

		x_4	x_3			
	-1	3	2	0		
x_1	1	-1	-2	4		
x_2	-1	-9	4	12		
x_5	8	-1	$\frac{1}{3}$	1		
		-3	$-\frac{16}{3}$			

Hmm, diesmal erstaunlich schnell eine Lösung ... und sogar zyklenfrei, ich bin begeistert.

$$\mathfrak{x}_{\text{opt}} = (4, 12, 0, 0, 1)^T$$

$$f(\mathfrak{x}_{\text{opt}}) = 0$$

Das duale LOP hierzu sieht nun auch nicht weiter schlimm aus:

$$\begin{cases} g(\mathfrak{y}) = (10, 0, 3)^T \cdot \mathfrak{y} \longrightarrow \text{Max.} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & 3 & -3 \\ 6 & -12 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Für die Lösung des dualen LOP basteln wir uns nun ein $\mathfrak{B}$, mittels der Komponenten $x_i > 0$, welches dann folgendermaßen aussieht:

$$\mathfrak{B} := (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Nun ist ein $\mathfrak{y}_{\text{opt}}$ folgendermaßen definiert (nach Beweis zu Satz 107):

$$\mathfrak{y}_{\text{opt}} := \left(\mathfrak{B}^{-1}\right)^T \cdot \mathfrak{c}_\star$$

wobei $\mathfrak{c}_\star$ der Vektor $\mathfrak{c}$ ist, der der gleichen Behandlung unterzogen wurde, wie die Matrix $\mathfrak{A}$, um ihn auf gefällige 3 Komponenten zu bringen, also $\mathfrak{c}_\star := (c_1, c_2, c_5)^T$.

Demzufolge:

$$\mathfrak{y}_{\text{opt}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

Noch ein kurzer Test, ob diese Lösung tatsächlich stimmt:

$$g(\mathfrak{y}_{\text{opt}}) = 0$$

Und siehe da, wir erhalten das gleiche Ergebnis. Kann Mathematik nicht wunderbar sein? :)