23.1

Zunächst ermittle ich die allgemeine Lösung des LGS der Nebenbedingungen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & 6 & 2 & 32 \\ 4 & -2 & -6 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 & -16 \\ 0 & 6 & 6 & 4 & 68 \\ 0 & 20 & 24 & 8 & 144 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{20}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{34}{3} \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{16}{3} & -\frac{248}{3} \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{62}{3} \end{array}\right)$$

$$t := x_4, \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} -16 \\ 32 \\ -\frac{62}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ecken sind nun alle jene Lösungen für $\mathfrak{x}$, für die $\mathfrak{x} \geq 0$ und alle a_i der Indexmenge $I_\mathfrak{x}$ linear unabhängig sind, es gibt max. 3 l. u. Spalten der Matrix, daher muß eine Komponente von $\mathfrak{x}$ 0 sein:

$t = 0 : \mathfrak{x} = \left(-14, 32, -\frac{62}{3}, 0\right)^T \Rightarrow$keine Ecke

$t = 14 : \mathfrak{x} = (0, 4, -2, 14)^T \Rightarrow$keine Ecke

$t = 15.5 : \mathfrak{x} = \left(\frac{3}{2}, 2, 0, \frac{31}{2}\right)^T, I_\mathfrak{x} = \{1, 2, 4\} \Rightarrow$Ecke

$t = 16 : \mathfrak{x} = \left(2, 0, \frac{2}{3}, 16\right)^T, I_\mathfrak{x} = \{1, 3, 4\} \Rightarrow$Ecke

23.2

$$\begin{array}{cccccccc} & & x_4 & x_5 & & & \\ & -1 & 1 & -15 & 0 & & \\ x_1 & -2 & -4 & -1 & 2 & - & \\ x_2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0.5 & i=2 \\ x_3 & -2 & 1 & -3 & 3 & - & \\ & & 4 & 21 & -11 & & \\ & & & j=5 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & x_4 & x_2 & \\
 & -1 & 1 & -15 & 0 \\
x_1 & -2 & -3.5 & 0.5 & 2.5 \\
x_5 & -15 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\
x_3 & -2 & 2.5 & 1.5 & 4.5 \\
 & & -6.5 & -10.5 & -21.5
\end{array}$$

Eine Lösung des LOP ist also $\mathfrak{x} = \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{9}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)^T$.

23.3

$$f(\mathfrak{x}) = (4, -2, 3, 1, 2, 1)^T \cdot \mathfrak{x} \longrightarrow \text{Min.}$$

$$\begin{pmatrix} 20 & 1 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & x_1 & x_4 & x_5 & & & \\
 & -1 & 4 & 1 & 2 & 0 & & \\
x_2 & -2 & 20 & 1 & -8 & 5 & - & \\
x_3 & 3 & -5 & -1 & 2 & 10 & 5 & \\
x_6 & 1 & -6 & 4 & 2 & 8 & 4 & i = 6 \\
 & & -65 & -2 & 22 & 28 & & \\
 & & & & j = 5 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & x_1 & x_4 & x_6 & & & \\
 & -1 & 4 & 1 & 1 & 0 & & \\
x_2 & -2 & -4 & 17 & 4 & 37 & - & \\
x_3 & 3 & 1 & -5 & -1 & 2 & 2 & i = 3 \\
x_5 & 2 & -3 & 2 & 0.5 & 4 & - & \\
 & & 1 & -46 & -11 & -60 & & \\
 & & j = 1 & & & & &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & x_3 & x_4 & x_6 & \\
 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\
x_2 & -2 & 4 & -3 & 0 & 45 \\
x_1 & 4 & 1 & -5 & -1 & 2 \\
x_5 & 2 & 3 & -13 & -2.5 & 10 \\
 & & -1 & -41 & -10 & -62 \\
 & & j=1 & & &
\end{array}
$$

Damit ist die Ecke $\mathfrak{x} = (2, 45, 0, 0, 10, 0)^T$ eine Lösung des LOP.

23.4

Eine Normalform des LOP ist folgende:

$$f'(\mathfrak{x}) = (-2, 1, -1, 1)^T \cdot \mathfrak{x} \longrightarrow \text{Min.}$$

$$
\begin{array}{rcl}
2x_1 + 6x_3 - 8x_4 & = & 18 \\
2_2 - 6x_3 + x_4 & = & 5 \\
x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 8 \\
\mathfrak{x} & \geq & 0
\end{array}
$$

Die einfachste Art (die mir momentan bekannt ist), das LOP auf Lösbarkeit zu untersuchen ist, einfach zu versuchen, es zu lösen. Der Simplex-Algorithmus zeigt an gegebener Stelle auf, falls es nicht lösbar ist.

Das LGS der Nebenbedingungen läßt sich schnell in das dazu äquivalente folgende umformen:

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 3 & -4 & 0 & 9 \\
0 & 1 & -6 & 1 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 8
\end{array}\right)
$$

Damit können wir dann den Simplex-Algorithmus anwenden:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & x_3 & x_4 & & & \\
 & -1 & -1 & 1 & 0 & & \\
x_1 & -2 & 3 & -4 & 9 & - & \\
x_2 & 1 & -6 & 1 & 5 & 5 & i=2 \\
x_5 & 0 & 1 & -2 & 8 & - & \\
 & & -11 & 8 & -13 & & \\
 & & & j=4 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & x_3 & x_3 & & \\
 & -1 & -1 & 1 & 0 & \\
x_1 & -2 & -21 & 4 & 29 & - \\
x_4 & 1 & -6 & 1 & 5 & - \\
x_5 & 0 & -11 & 2 & 18 & - \\
 & & 37 & -8 & -53 & \\
 & & j=3 & & &
\end{array}
$$

Da hier zu dem j kein i mehr ermittelt werden kann, ist das LOP nicht lösbar.