# 21.1

## (a)

$$\mathfrak{A} := (a_{ij})_{4,4} = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 12 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 15 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{b} := (b_1, b_2, b_3, b_4)^T = (11, 14, 14, 19)^T$

Jacobi-Verfahren:

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_0 & := \mathfrak{o} \\ \mathfrak{x}_{n+1} & := \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ \frac{7}{6} \\ \frac{14}{15} \\ \frac{19}{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}_n; \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Gauß-Seidel-Verfahren:

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_0 & := \mathfrak{o} \\ \mathfrak{x}_i & := \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, x_4^{(i)}\right)^T \\ x_r^{(i+1)} & := \frac{b_r}{a_{rr}} - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{a_{rj}}{a_{rr}} \cdot x_j^{(i+1)} - \sum_{j=r+1}^{n} \frac{a_{rj}}{a_{rr}} \cdot x_j^{(i)}; \quad r \in \{1,2,3,4\}, i \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Berechnung mit dem Jacobi-Verfahren:

$$\mathfrak{x}_0 := \mathfrak{o}$$

$$\mathfrak{x}_1 = \left(\frac{11}{10}, \frac{7}{6}, \frac{14}{15}, \frac{19}{20}\right)^T \approx (1.1, 1.16667, 0.93333, 0.95)^T$$

$$\mathfrak{x}_2 = \left(\frac{77}{75}, \frac{179}{180}, \frac{451}{450}, \frac{637}{600}\right)^T \approx (1.02667, 0.99444, 1.00222, 1.06167)^T$$

Berechnung mit dem Gauß-Seidel-Verfahren:

$$x_0 := \mathfrak{o}$$

$$\mathfrak{x}_1 = \left(\frac{11}{10}, \frac{43}{40}, \frac{121}{120}, \frac{401}{400}\right)^T \approx (1.1, 1.075, 1.00833, 1.0025)^T$$

$$\mathfrak{x}_2 = \left(\frac{1007}{1000}, \frac{35989}{36000}, \frac{108103}{108000}, \frac{359863}{360000}\right)^T \approx (1.007, 0.99969, 1.00095, 0.99962)^T$$

## (b)

Die Konvergenz von Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren folgt nach Satz 99 aus der Bedingung $\|\mathfrak{B}\| < 1$.

Für das Jacobi-Verfahren gilt:

$$\mathfrak{B} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathfrak{B}\|_1 = \frac{4}{15} \approx 0.2667$$

$$\|\mathfrak{B}\|_\infty = \frac{1}{3} \approx 0.3333$$

Damit konvergiert das Jacobi-Verfahren.

Für das Gauß-Seidel-Verfahren können wir $\|\mathfrak{B}\|_\infty$ folgendermaßen abschätzen:

$$\|\mathfrak{B}\|_\infty \leq \max_k \alpha_k$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$\alpha_2 = \frac{11}{40} = 0.275$$

$$\alpha_3 = \frac{7}{120} \approx 0.0583$$

$$\alpha_4 = \frac{17}{400} = 0.0425$$

$$\Rightarrow \|\mathfrak{B}\|_\infty \leq 0.3$$

Damit konvergiert auch das Gauß-Seidel-Verfahren.

### (c)

Nach Satz 90 gilt:

$$\|\mathfrak{x}_\star - \mathfrak{x}_i\|_\infty \leq \frac{k^i}{1-k} \cdot \|\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0\|_\infty$$

Für Jacobi:

$\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{o}$

$\mathfrak{x}_1 = \left(\frac{11}{10}, \frac{7}{6}, \frac{14}{15}, \frac{19}{20}\right)^T$

$k = \|\mathfrak{B}\| = \frac{1}{3}$ (siehe Konvergenzabschätzung oben)

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^i}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{7}{6} < 10^{-6}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^i < \frac{1}{1750000}$$

$$i \cdot \ln\frac{1}{3} < \ln\frac{1}{1750000}$$

$$i > \frac{\ln\frac{1}{1750000}}{\ln\frac{1}{3}} \approx 13.08$$

$$\Rightarrow i = 14$$

Für Gauß-Seidel:

$\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{o}$

$\mathfrak{x}_1 = \left(\frac{11}{10}, \frac{43}{40}, \frac{121}{120}, \frac{401}{400}\right)^T$

$k = \|\mathfrak{B}\| = 0.3$ (siehe Konvergenzabschätzung)

$$\begin{aligned}
\frac{0.3^i}{0.7} \cdot 1.1 &< 10^{-6} \\
0.3^i &< \frac{7}{11000000} \\
i \cdot \ln 0.3 &< \ln\frac{7}{11000000} \\
i &> \frac{\ln\frac{7}{11000000}}{\ln 0.3} \approx 11.9 \\
\Rightarrow i &= 12
\end{aligned}$$

## 21.2

**Voraussetzung.**

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}^T &:= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n \times 1} \\ \|\mathfrak{x}\|_1 &:= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \\ \mathfrak{A} &:= (a_{ij})_{n,n} \end{aligned}$$

**Behauptung.** $\|\mathfrak{A}\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ *(maximale Spaltenbetragssumme)*

*Beweis.*

$$\left\| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{1i}x_i| + \dots + \sum_{i=1}^{n} |a_{ni}x_i|$$

Nach Dreiecksungleichung muß ebenfalls gelten:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{1i}x_i| + \dots + \sum_{i=1}^{n} |a_{ni}x_i| \le \left( \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\Rightarrow \frac{\|\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}\|_1}{\|\mathfrak{x}\|_1} \le \frac{\left( \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|}{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|} = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Weiterhin muß ein $\mathfrak{x}$ existieren, für das nicht nur $\le$ sondern sogar $=$ gilt. Dieses $\mathfrak{x}$, welches ein Maximum bei $j$ hat, können wir folgendermaßen konstruieren:

$$\mathfrak{x} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{jtes Element}$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{\|\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}\|_1}{\|\mathfrak{x}\|_1} = \frac{\max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|}{1} = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

□