20.1

$$[a,b]\cdot([c,d]+[e,f]) \subseteq [a,b]\cdot[c,d]+[a,b]\cdot[e,f]$$

$$\begin{aligned}[a,b]\cdot[c+e,d+f] \quad \subseteq \quad & [\min(ac,ad,bc,bc),\max(ac,ad,bc,bc)] \\ + \quad & [\min(ae,af,be,bf),\max(ae,af,be,bf)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\min(ac+ae,ad+af,bc+be,bd+bf),\max(ac+ae,ad+af,bc+be,bd+bf)] \\ \subseteq [\quad & \min(ac+ae,ac+af,ac+be,ac+bf,ad+ae,ad+af,ad+be,ad+bf, \\ & \qquad bc+ae,bc+af,bc+be,bc+bf,bd+ae,bd+af,bd+be,bd+bf), \\ & \max(ac+ae,ac+af,ac+be,ac+bf,ad+ae,ad+af,ad+be,ad+bf, \\ & \qquad bc+ae,bc+af,bc+be,bc+bf,bd+ae,bd+af,bd+be,bd+bf) \quad]\end{aligned}$$

Es ist ersichtlich, daß die Terme der „linken“ Seite jeweils in der „rechten“ ebenso enthalten sind, dort allerdings einige mehr noch auftauchen. Damit ist das „rechte“ Intervall potentiell größer als das „linke“, womit die Relation $\subseteq$ gezeigt ist.

Als Beispiel für die Relation $\subset$ läßt sich folgendes nutzen:

$$\left.\begin{array}{rcl}[a,b] & = & [0,2] \\ [c,d] & = & [1,-2] \\ [e,f] & = & [-1,2]\end{array}\right\}[0,0] \subset [-4,2]+[-2,4]=[-6,6]$$

20.2

(a)

$$f(x)=x^3+x^2-1; \quad [a,b]=\left[0,\frac{1}{4}\right]$$

Nach Satz 91 läßt sich k folgendermaßen berechnen:

$$k=\max|f'(x)|$$

Für die Ränder des Intervalls ergibt sich

$$f'(0)=0, f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{16}=0.6875$$

Das Extremum der von f' liegt außerhalb des Intervalls, womit sich

$$k=\frac{11}{16}=0.6875$$

ergibt.

(b)

$$f(x) = \cos x - \frac{1}{x^2} + 1; \quad [a, b] = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$f'(x) = -\sin x + \frac{2}{x^3}$$

$$f''(x) = -\cos x - \frac{6}{x^4}$$

Betrachtung der Ränder des Definitionsbereiches liefert

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx -0.4840; \quad f'(\pi) \approx 0.0646$$

Ich habe hier eine Näherung für das Extremum von f' mit dem Newton-Verfahren ermittelt.

$$f''(x) = -\cos x - \frac{6}{x^4}$$

$$f'''(x) = \sin x + \frac{24}{x^5}$$

Newton-Verfahren: $f'' = 0$ ist gesucht.

$$\begin{cases} x_0 := 2 \\ x_{n+1} := x_n - \frac{f''(x_n)}{f'''(x_n)} \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & 2 \\ x_1 & \approx & 1.9752 \\ x_2 & \approx & 1.9756 \\ x_3 & \approx & 1.9756 \end{array}$$

$$f'(1.9756) \approx -0.6598$$

$$\Rightarrow k \approx 0.6598$$

20.3

$$A := [0, 3]$$

$$f : A \to A, x \mapsto f(x) = \frac{1}{x+2} + 2$$

$$x_\star = \sqrt{5}$$

(a)

Die Lipschitzbedingung lautet: $\forall x_1, x_2 \in A : |f(x_1) - f(x_2)| \leq k \cdot |x_1 - x_2|$. Das können wir folgendermaßen umformen:

$$\left| \frac{1}{x_1 + 2} + 2 - \frac{1}{x_2 + 2} - 2 \right| \leq k \cdot |x_1 - x_2|$$

$$k \geq \frac{1}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}$$

Im Intervall $[0, 3]$ wird dieser Bruch nicht negativ und erst recht nicht größer als 1. Folglich ist die Lipschitz-Bedingung erfüllt, da ein k mit $0 \leq k < 1$ existiert.

(b)

$$\begin{cases} x_0 := 3 \\ x_{n+1} := f(x_n) = \frac{1}{x_n+2} + 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 3 \\ x_1 &= \tfrac{11}{5} = 2.2 \\ x_2 &= \tfrac{47}{21} \approx 2.238 \\ x_3 &= \tfrac{199}{89} \approx 2.236 \end{aligned}$$

(c)

$$f'(x) = -\frac{1}{(x + 2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x + 2)^3} = 0$$

Diese Gleichung hat keine Lösungen, demnach sind die einzig möglichen Werte die Ränder des Definitionsbereiches, woraus sich $k = \frac{1}{4}$ ergibt.

$$|x_n - x_\star| \leq \frac{k^n}{1 - k} \cdot |x_1 - x_0|$$

$$|x_n - x_\star| \leq \frac{16}{15 \cdot 4^n}$$

$$\frac{16}{15 \cdot 4^n} \leq 10^{-4}$$

$$n \cdot \ln 4 \geq \ln \frac{16}{15 \cdot 10^{-4}}$$

$$n \geq \frac{\ln \frac{16}{15 \cdot 10^{-4}}}{\ln 4} \approx 6.6...$$

Damit sind 7 Schritte nötig, um den Wert bis auf 4 Stellen Genauigkeit zu bestimmen. Durch Probieren mit den obigen Werten erhält man diese Genauigkeit allerdings schon nach dem 4. Schritt.

20.4

$$g(x) = e^x - x^2$$

$$I = [-0.9, -0.5]$$

(a)

Newton-Verfahren:

$$\begin{cases} x_0 := -0.5 \\ x_{n+1} := x_n - \frac{e^{x_n} - x_n^2}{e^{x_n} - 2x_n^3}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Regula falsi:

$$\begin{cases} x_0 := -0.9 \\ x_1 := -0,5 \\ x_{n+1} := \frac{x_n + 0.9}{(e^{x_n} - x_n^2) - (e^{-0.9} - 0.9^2)}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x_0 := -0.5 \\ x_{n+1} := x_n - \frac{e^{x_n} - x_n^2}{e^{x_n} - 2x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$$x_0 = -0.5$$

$$x_1 = -0.5 - \frac{e^{-0.5} - 0.25}{e^{-0.5} + 1} \approx -0.7219$$

$$x_2 \approx -0.7036$$

$$x_3 \approx -0.7035$$