18.1

$$T : x^2 + 7y^2 + 2\sqrt{7}xy - 2y = 0$$

$$T : \mathfrak{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & 7 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x} + 2 \cdot (0, -1) \cdot \mathfrak{x} = 0$$

$\operatorname{rg} \mathfrak{A} = 1, \operatorname{rg}(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) = 2 \Rightarrow$Fall 2

1. Transformation: $\mathfrak{x} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}'$

   EW von $\mathfrak{A}$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - 8\lambda = \lambda(\lambda - 8) \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 8 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$$

   EV zum EW 8:

$$\begin{pmatrix} -7 & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{x} = t \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{14}}{4} \end{pmatrix}$$

   EV zum EW 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{7} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{14}}{28} \end{pmatrix}$$

   $\mathfrak{b}'_1 = -\frac{\sqrt{14}}{4}, \mathfrak{b}'_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\Rightarrow \mathfrak{x}'^T \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}' + 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{14}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \cdot \mathfrak{x}' = 0$$

2. Transformation: $\mathfrak{x}' = \mathfrak{c} + \mathfrak{x}''$

$$\mathfrak{c} = \left(-\frac{\mathfrak{b}'_1}{\lambda_1}, \frac{\frac{\mathfrak{b}'^2_1}{\lambda_1}}{2\mathfrak{b}'_2} \right) = \left(\frac{\sqrt{14}}{32}, -\frac{7\sqrt{2}}{16} \right)$$

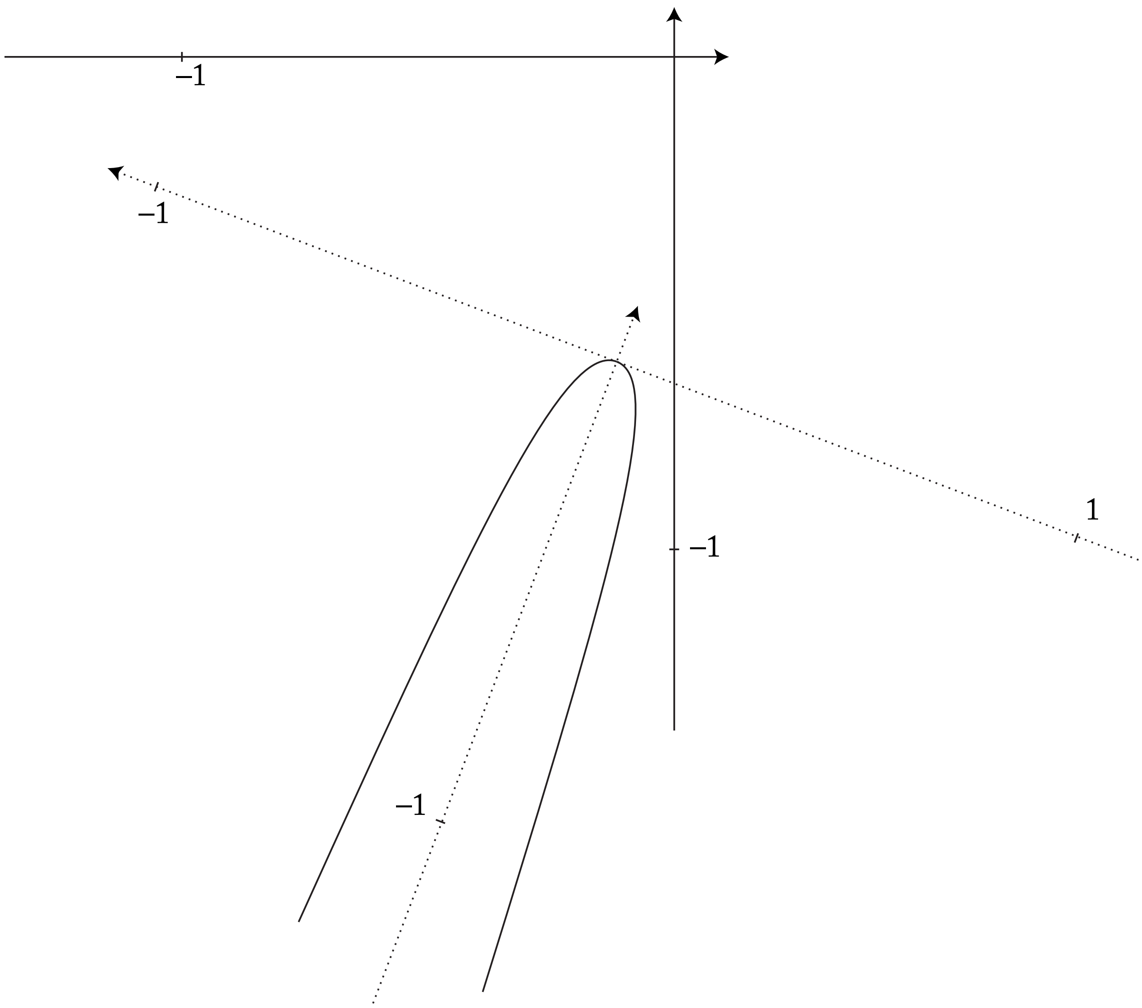
$$\Rightarrow \mathfrak{x}''^T \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}'' + 2 \cdot \left(0, -\frac{7\sqrt{2}}{16} \right) \cdot \mathfrak{x}'' = 0$$

$$\Rightarrow \mathfrak{x}''^T \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}'' + 2 \cdot \left(0, -\frac{7\sqrt{2}}{16} \right) \cdot \mathfrak{x}'' = 0$$

Das führt uns auf folgende Normalform:

$$\Rightarrow \frac{64\sqrt{2}}{7} x''^2 - 2y = 0$$

welche eine Parabel darstellt.



18.2

(a)

$$T_1 : x^2 + y^2 + 16z^2 + 8xz + 2x - 2y + 2z = 0$$

$$\mathfrak{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x} + 2 \cdot (1, -1, 1) \cdot \mathfrak{x} = 0$$

$\operatorname{rg} \mathfrak{A} = 2$, $\operatorname{rg}(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) = 3 \Rightarrow$Fall 2

1. Transformation: $\mathfrak{x} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}'$

   EW von $\mathfrak{A}$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 16-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(16-\lambda) - 16(1-\lambda) = (1-\lambda) \cdot ((1-\lambda)(16-\lambda) - 16)$$

$$= (1-\lambda) \cdot \left(\lambda^2 - 17\lambda\right) = (1-\lambda)(\lambda - 17) \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 17, \lambda_3 = 0$$

   EV: $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   EV: $\lambda = 17$

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -16 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{x} = t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} \\ 0 \\ \frac{4}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$$

   EV: $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{b}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{17}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$$

Das führt uns auf die folgende Gleichung:

$$\mathfrak{x}' \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}' + 2 \cdot \left(\mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{b}_3\right) \cdot \mathfrak{x}' = 0$$

$$\mathfrak{x}' \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}' + 2 \cdot \underbrace{\left(-1, \frac{5\sqrt{17}}{17}, -\frac{3\sqrt{17}}{17}\right)}_{=:\mathfrak{b}'} \cdot \mathfrak{x}' = 0$$

2. Transformation: $\mathfrak{x}' = \mathfrak{c} + \mathfrak{x}''$

$$\mathfrak{c} = \left(-\frac{b_1'}{\lambda_1}, -\frac{b_2'}{\lambda_2}, \frac{\frac{{b_1'}^2}{\lambda_1} + \frac{{b_2'}^2}{\lambda_2}}{2b_3'}\right)^T = \left(1, -\frac{5\sqrt{17}}{289}, -\frac{157\sqrt{17}}{867}\right)^T$$

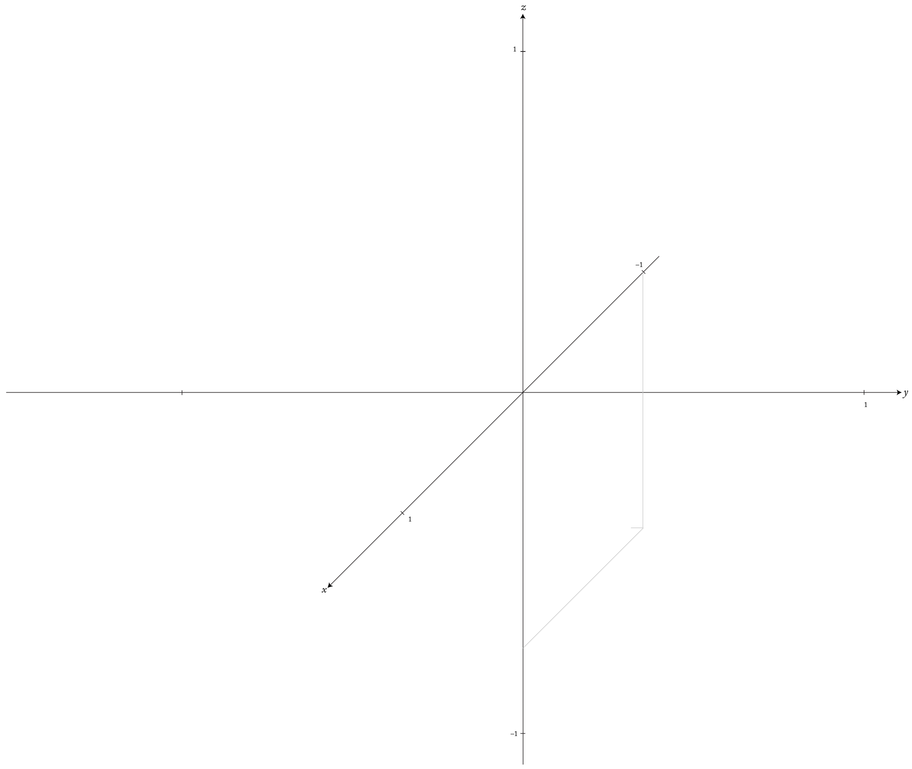
Damit erhalten wir die folgende Gleichung:

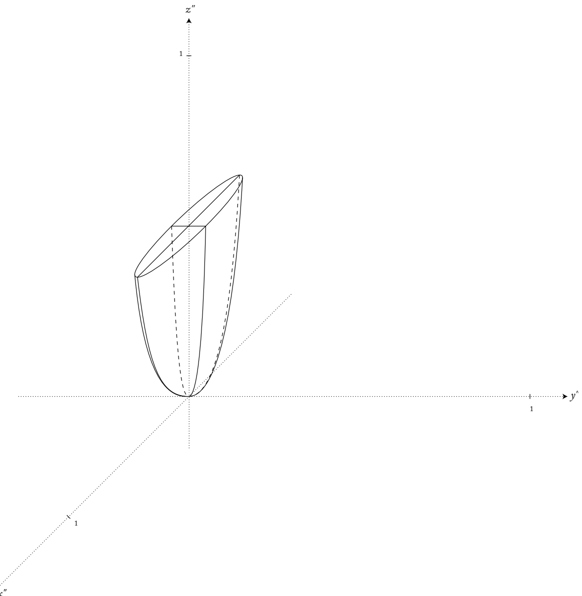
$$\mathfrak{x}''^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}'' + 2 \cdot \left(0, 0, -\frac{3\sqrt{17}}{17}\right) \cdot \mathfrak{x}'' = 0$$

Womit wir die Normalform vom Typ (II) erhalten:

$$\frac{\sqrt{17}}{3} x''^2 + \frac{17\sqrt{17}}{3} y''^2 - 2z = 0$$

was einem elliptischen Paraboloid entspricht.





(b)

$$T_2 : xy + xz + yz + x + y + z = 0$$

$$T_2 : \mathfrak{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \mathfrak{x} = 0$$

rg $\mathfrak{A} = 3 \Rightarrow$Fall 1

1. Transformation: $\mathfrak{x} = \mathfrak{c} + \mathfrak{x}'$

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} = -\mathfrak{b} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$c' = \mathfrak{b}^T \cdot \mathfrak{c} + c = -\frac{3}{4}$$

2. Transformation: $\mathfrak{x}' = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}''$

EW von $\mathfrak{A}$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

EV zum EW 1:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zum EW $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{x} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\mathfrak{x}''^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x}'' - \frac{3}{4} = 0$$

Und daraus wiederum folgende Normalform:

$$\frac{4}{3}x'' - \frac{2}{3}y'' - \frac{2}{3}z'' = 1$$

welche vom Typ (Ib) ist und ein zweischaliges Hyperboloid darstellt.