

17.1

gegeben: $B := (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, B sei Basis von \vec{V}_3 , $C := (1; 1, 1, 1)^T$, $P := (1; 4, 7, 1)^T$, $\mathbf{a} := (0; 7, 1, 1)^T$, $\mathbf{b}'_1 := (0; 0, 1, 1)^T$, $\mathbf{b}'_2 := (0; 1, 0, 1)^T$, $\mathbf{b}'_3 := (0; 1, 1, 0)^T$, $B' := (\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_3)$, $S' := (C, \mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_3)$

gesucht: $\mathbf{a}|_{B'}$, $P|_{S'}$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \end{array} \right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{a}|_{B'} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow P|_{S'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

17.2

Nach Satz 78 gilt:

Sei $\mathfrak{A} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}^{n \times n}$ und $\mathfrak{B} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}_r^{n \times n}$, dann gilt: $\mathfrak{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$, mit \mathbf{b}_i für alle $i = 1, \dots, n$ EV der Matrix \mathfrak{A} und alle \mathbf{b}_i sind linear unabhängig $\iff \mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{D}$, wobei \mathfrak{D} Diagonalmatrix mit den EW von \mathfrak{A} ist.

Ermitteln wir nun die EW von $\mathfrak{A}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\det(\mathfrak{A}_1 - \lambda \cdot \mathfrak{E}_4) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & 7 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^4 + \lambda^3 - 7\lambda - \lambda + 6$$

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & -7 & -1 & 6 \\ 1 & & 1 & 2 & -5 & -6 \\ \hline & 1 & 2 & -5 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\lambda_{3/4} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda_3 = 2$$

$$\lambda_4 = -3$$

EV zum EW 1:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$$

$$\begin{aligned}
 -x_1 + x_2 &= 0 \\
 -x_2 + x_3 &= 0 \\
 -x_3 + x_4 &= 0 \\
 -6x_1 + x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4$$

Wähle $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zum EW -1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= 0 \\
 x_2 + x_3 &= 0 \\
 x_3 + x_4 &= 0 \\
 -6x_1 + x_2 + 7x_3 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4$$

Wähle $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

EV zum EW 2 :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
 -2x_1 + x_2 &= 0 \\
 -2x_2 + x_3 &= 0 \\
 -2x_3 + x_4 &= 0 \\
 -6x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_4 = 2x_3 \wedge x_3 = 2x_2 \wedge x_2 = 2x_1$$

Wähle $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

EV zum EW -3 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
 3x_1 + x_2 &= 0 \\
 3x_2 + x_3 &= 0 \\
 3x_3 + x_4 &= 0 \\
 -6x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_4 = -3x_3 \wedge x_3 = -3x_2 \wedge x_2 = -3x_1$$

Wähle $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir nun nach dem „Rezept“ aus Satz 78 eine Matrix \mathfrak{B} aufstellen, so erhalten wir folgende:

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 27 \\ 1 & -1 & 2 & -9 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Voraussetzung. $\mathfrak{A}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathfrak{A} \text{ ist diagonalisierbar} \iff \mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{D}$$

Behauptung. \mathfrak{A}_2 ist nicht diagonalisierbar.

Beweis. Da \mathfrak{B} regulär sein muß, sonst wäre sie nicht invertierbar, können wir von links mit \mathfrak{B} multiplizieren:

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D}$$

Stellen wir nun mal beide Seiten ausführlich auf:

$$\begin{pmatrix} b_{11} + b_{31} & b_{12} + b_{32} & b_{13} + b_{33} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 b_{11} & d_2 b_{12} & d_3 b_{13} \\ d_1 b_{21} & d_2 b_{22} & d_3 b_{23} \\ d_1 b_{31} & d_2 b_{32} & d_3 b_{33} \end{pmatrix}$$

Das führt uns sofort auf folgendes:

$$d_1 = d_2 = d_3 = 1$$

Damit ist die einzig mögliche Diagonalmatrix die Einheitsmatrix \mathfrak{E}_3 , was uns wiederum auf folgende Gleichungen führt (da auf der rechten Seite nur noch \mathfrak{B} übrig bleibt):

$$\begin{aligned} b_{11} + b_{31} &= b_{11} \\ b_{12} + b_{32} &= b_{12} \\ b_{13} + b_{33} &= b_{13} \end{aligned}$$

und damit auf:

$$\begin{aligned} b_{31} &= 0 \\ b_{32} &= 0 \\ b_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir in der Matrix \mathfrak{B} eine Nullzeile, was nach Voraussetzung nicht sein darf, da $\mathfrak{B} \in K_r^{3 \times 3}$. Somit ist \mathfrak{A}_2 nicht diagonalisierbar. \square

17.3

(a)

$$T_1 : x^2 + y^2 + 8xy - 10x + 20y - 35 = 0$$

$$\mathfrak{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{x} + 2 \cdot (-5, 10) \cdot \mathfrak{x} - 35 = 0$$

$$\text{rg } \mathfrak{A} = \text{rg}(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) = 2 \Rightarrow \text{Fall 1}$$

1. Transformation: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}' + \mathfrak{c}$

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c} = -\mathfrak{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & -10 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -15 & -30 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{x}'^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}' + c' = 0$$

$$c' = 35 - 35 = 0$$

$$\Rightarrow \mathfrak{x}'^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}' = 0$$

2. Transformation: $\mathfrak{x}' = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{x}''$

EW von \mathfrak{A}

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -3 \end{matrix}$$

EV zum EW 5:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

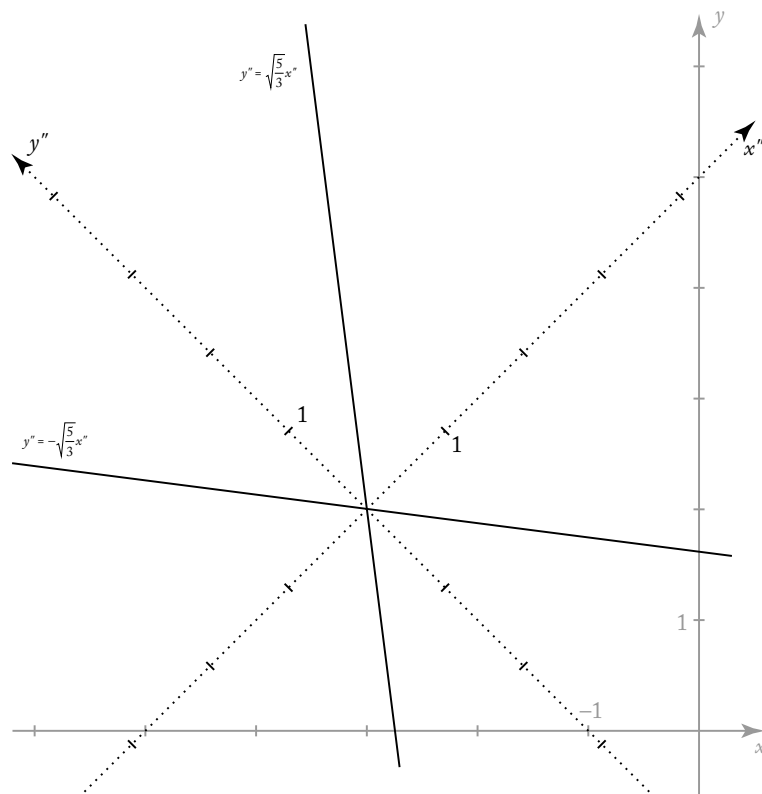
EV zum EW -3:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Damit ergibt sich $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x}''^T \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}'' = 0 \Rightarrow 5x''^2 - 3y''^2 = 0$$

Diese Gleichung beschreibt ein sich schneidendes Geradenpaar $y'' = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}x''$:



(b)

$$T_2 : 6x^2 + 3y^2 + 4xy - 4x + 8y + 9 = 0$$

$$\mathbf{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + 2 \cdot (-2, 4) \cdot \mathbf{x} + 9 = 0$$

$$\text{rg } \mathfrak{A} = \text{rg}(\mathfrak{A}, b) = 2 \Rightarrow \text{Fall 1}$$

1. Transformation: $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{x}'$

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{c} = -\mathbf{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & -14 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$c' = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{c} + c = -1$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}'^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathbf{x}' - 1 = 0$$

2. Transformation: $\mathbf{x}' = \mathfrak{B} \cdot \mathbf{x}''$ EW von \mathfrak{A} :

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14$$

$$\lambda_1 = 7$$

$$\lambda_2 = 2$$

EV zum EW 7:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

$$\mathbf{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

EV zum EW 2:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow x_2 = -2x_1$$

$$\mathbf{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Damit erhalten wir die Matrix $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x}''^T \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}'' - 1 = 0$$

Die resultierende Gleichung $7x''^2 + 2y''^2 = 1$ ist vom Typ (Ib) und stellt eine Ellipse dar:

