

## 16.1

$$\begin{array}{rcccccc} 1 & -7 & -61 & 203 & -260 & 924 \\ 3 & & 3 & -12 & -219 & -48 & -924 \\ \hline 1 & -4 & -73 & -16 & -308 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3$$

$$\begin{array}{rcccccc} 1 & -4 & -73 & -16 & -308 & \\ -7 & & 3 & -12 & -219 & -48 & -924 \\ \hline 1 & -11 & 4 & -44 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_2 = -7$$

$$\begin{array}{rcccc} 1 & -11 & 4 & -44 \\ 11 & & 11 & 0 & 44 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_3 = 11$$

$$x_{4/5} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_4 = 2i \\ x_5 = -2i \end{array}$$

$$p_5(x) = (x - 3)(x + 7)(x - 11)(x - 2i)(x + 2i)$$

## 16.2

(a)

**Voraussetzung.**  $\mathfrak{A} \in K^{n \times n}$ ,  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

**Behauptung.**  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}^T$  besitzen die gleichen Eigenwerte  $\lambda$ .

*Beweis.* Nach Satz 30 unterscheidet sich die Determinante  $|\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n|$  nicht von der Determinante  $|\mathfrak{A}^T - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n|$ . Der Summand  $-\lambda \cdot \mathfrak{E}_n$  wirkt auch nur auf die Hauptdiagonale, die sich beim Transponieren nicht ändert.  $\square$

(b)

**Voraussetzung.** Sei  $K = \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{A}$  orthogonal sowie  $\lambda$  Eigenwert von  $\mathfrak{A}$

**Behauptung.**  $\lambda \neq 0$  und  $\frac{1}{\lambda}$  ebenfalls Eigenwert von  $\mathfrak{A}$

*Beweis.*  $\lambda \neq 0$  folgt aus Satz 72:  $\mathfrak{A}$  orthogonal  $\Rightarrow \det \mathfrak{A} \in \{-1, 1\}$ .

Wir nehmen uns zunächst die übliche Gleichung für Eigenwerte:

$$(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_n) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$$

Hier teilen wir nun durch  $\lambda$ , da  $\lambda \neq 0$  ist, wie eben nachgewiesen, geht das problemlos:

$$\left( \frac{1}{\lambda} \cdot \mathfrak{A} - 1 \cdot \mathfrak{E} \right) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$$

Stellen wir nun ein wenig um, auch unter Ausnutzung des Kriteriums für orthogonale Matrizen  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^T = \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{E}_n$ :

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} - \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$$

Nun können wir von links mit  $\mathfrak{A}^T$  multiplizieren:

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} - \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{o}$$

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \mathfrak{E}_n \cdot \mathfrak{x} - \mathfrak{A}^T \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$$

Nun multiplizieren wir mit  $(-1)$  und klammern  $\mathfrak{x}$  wieder aus:

$$\left( \mathfrak{A}^T - \frac{1}{\lambda} \cdot \mathfrak{E}_n \right) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$$

Da wir in (a) schon bewiesen haben, daß  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}^T$  die gleichen Eigenwerte besitzen, gilt diese Gleichung auch für  $\mathfrak{A}$ .  $\square$

## 16.3

(a)

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 \\ 7 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 42 &= 0 \\ \lambda^2 - 7\lambda - 30 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 30}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 10 \\ \lambda_2 &= -3 \end{aligned}$$

EV zum EW 10:

$$(\mathfrak{A} - 10 \cdot \mathfrak{E}_2) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$$

$$-6x_1 + 6x_2 = 0$$

Wähle  $t \in \mathbb{R}, t = x_1$ :

$$\mathfrak{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zum EW  $-3$ :

$$(\mathfrak{A} + 3 \cdot \mathfrak{E}_2) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$$

$$7x_1 + 6x_2 = 0$$

Wähle  $t \in \mathbb{R}, t = x_1$ :

$$\mathfrak{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_4) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 12-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 12-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-4) \cdot (1-\lambda)^2 + (1-\lambda) \cdot ((1-\lambda)^2 \cdot (12-\lambda) - 2 \cdot (4-4\lambda))$$

$$= (1-\lambda)^2 \cdot (\lambda^2 - 13\lambda) \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 13\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_{3/4} = \frac{13}{2} \pm \frac{13}{2}$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= 13 \\ \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

EV zum EW 1:

$$(\mathfrak{A} - \mathfrak{E}_4) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$$

$$\begin{array}{rcccc} & & 2x_3 & & = 0 \\ & & 2x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 11x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & 2x_3 & & & & & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 & = & 0 \end{array}$$

Wähle  $t_1, t_2 \in \mathbb{R} : t_1 = x_2, t_2 = x_4$

$$\mathfrak{x} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zum EW 13:

$$(\mathfrak{A} - \mathfrak{E}_4) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$$

$$\begin{array}{rcccc} -12x_1 & & & 2x_3 & = 0 \\ & - & 12x_2 & 2x_3 & = 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & & 2x_3 & - & 12x_4 & = & 0 \end{array}$$

$$x_3 = 6x_1 = 6x_2 = 6x_4$$

Wähle  $t \in \mathbb{R}, t = \frac{1}{6}x_3$ :

$$\mathfrak{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zum EW 0:

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$$

$$\begin{array}{rcccc} x_1 & & & & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & & & \\ & & x_2 & & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 12x_3 & + & 2x_4 = 0 \\ & & & & 2x_3 & + & x_4 = 0 \end{array}$$

$$x_1 = x_2 = x_4 = -2x_3$$

Wähle  $t \in \mathbb{R}, t = x_3$ :

$$\mathfrak{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathfrak{A} - \lambda \cdot \mathfrak{E}_3) = 0$$

$$= (5 - \lambda)(3 - \lambda)(4 - \lambda) - 10 + 2\lambda + 4 - \lambda - 6 + 2\lambda$$

$$= \lambda^3 - 12\lambda^2 - 44\lambda + 48$$

$$\begin{array}{cccc} & -1 & 12 & -44 & 48 \\ 2 & & -2 & 20 & -48 \\ \hline & -1 & 10 & -24 & 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\begin{array}{ccc} -1 & 10 & -24 \\ 4 & -4 & 24 \\ \hline -1 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\lambda_2 = 4$$

$$\lambda_3 = 6$$

EV zum EW 2:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wähle  $t \in \mathbb{R}, t = x_3$ :

$$\mathbf{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zum EW 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Wähle  $t \in \mathbb{R}, t = x_2$ :

$$\mathbf{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EV zum EW 6:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wähle  $t \in \mathbb{R}, t = x_3$ :

$$\mathbf{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 16.4

Verfahren nach Beweis zu Satz 83:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (1, 1, 6, 1)^T \\ \mathbf{a}_2 &= (-1, 0, 0, 1)^T \\ \mathbf{a}_3 &= (-1, 1, 0, 0)^T \\ \mathbf{a}_4 &= (-2, -2, 1, -2)^T \end{aligned}$$

$\mathbf{e}_1$ :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{a}_1\|} \cdot \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{39}} \cdot (1, 1, 6, 1)^T$$

$\mathbf{e}_2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_2 - \varphi(\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 \\ &= (-1, 0, 0, 1)^T - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_1 = (-1, 0, 0, 1)^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1, 0, 0, 1)^T$$

$\mathbf{e}_3$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3 &= \mathbf{a}_3 - \varphi(\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 - \varphi(\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= (-1, 1, 0, 0)^T - 0 - \frac{1}{2} \cdot (-1, 0, 0, 1)^T \\ &= \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}\right)^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}\right)^T$$

$\mathbf{e}_4$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_4 &= \mathbf{a}_4 - \varphi(\mathbf{a}_4, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 - \varphi(\mathbf{a}_4, \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 - \varphi(\mathbf{a}_4, \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_3 \\ &= (-2, -2, 1, -2)^T - 0 - 0 - 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (-2, -2, 1, -2)^T$$

Damit ergibt sich die Matrix  $\mathfrak{B}$ :

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{39}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{1}{\sqrt{39}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{6}{\sqrt{39}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} \\ \frac{1}{\sqrt{39}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$