15.1

$$
\begin{aligned}
V &:= {}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{3\times 1} \\
\varphi\Big((x_1,x_2,x_3)^T,(y_1,y_2,y_3)^T\Big) &:= 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 \\
&= (x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} &=: \mathfrak{A}
\end{aligned}
$$

Behauptung: *φ ist ein Skalarprodukt von V.*

Beweis. $\mathfrak{a} := (a_1,a_2,a_3)^T, \mathfrak{b} := (b_1,b_2,b_3)^T, \mathfrak{c} := (c_1,c_2,c_3)^T; \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$
1. Bilinearität:

$$
\begin{aligned}
\forall \mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c} \in V : \forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} : \quad & \varphi(\mathfrak{a}\cdot\alpha + \mathfrak{b}\cdot\beta,\mathfrak{c}) = \alpha\cdot\varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{c}) + \beta\cdot\varphi(\mathfrak{b},\mathfrak{c}) \\
& \wedge\varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{b}\cdot\beta + \mathfrak{c}\cdot\gamma) = \overline{\beta}\cdot\varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) + \overline{\gamma}\cdot\varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{c})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha\cdot\mathfrak{a} + \beta\cdot\mathfrak{b})^T\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{c} &= \alpha\cdot\mathfrak{a}^T\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{c} + \beta\cdot\mathfrak{b}^T\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{c} \\
&= (\alpha\cdot\mathfrak{a})^T\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{c} + (\beta\cdot\mathfrak{b})^T\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{c} \\
&= (\alpha\cdot\mathfrak{a} + \beta\cdot\mathfrak{b})^T\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a^T\cdot\mathfrak{A}\cdot(\beta\cdot\mathfrak{b} + \gamma\cdot\mathfrak{c}) &= \overline{\beta}\cdot\mathfrak{a}^T\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{b} + \overline{\gamma}\cdot\mathfrak{a}^T\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{c} \\
&= \mathfrak{a}^T\cdot\mathfrak{A}\cdot(\beta\cdot\mathfrak{b}) + \mathfrak{a}^T\cdot\mathfrak{A}\cdot(\gamma\cdot\mathfrak{c}) \\
&= a^T\cdot\mathfrak{A}\cdot(\beta\cdot\mathfrak{b} + \gamma\cdot\mathfrak{c})
\end{aligned}
$$

2. Symmetrie:

$$\forall \mathfrak{a},\mathfrak{b} \in V : \varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \varphi(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$$

$$\text{gilt, da } \mathfrak{A} \text{ symmetrisch}$$

3. positiv definit

$$\forall \mathfrak{a} \in V : \varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) \geq 0$$

$$
\begin{aligned}
3a_1^2 - a_1a_2 - a_2a_1 + a_2^2 + 2a_3^2 &\geq 0 \\
3a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + 2a_3^2 &\geq 0 \\
2a_1^2 + (a_1 - a_2)^2 + 2a_3^2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$\forall \mathfrak{a} \in V : (\varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = 0 \iff \mathfrak{a} = \mathfrak{o})$$

„⇒“ $\left(\underbrace{2a_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{(a_1 - a_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2a_3^2}_{\geq 0} = 0\right) \Rightarrow (\mathfrak{a} = \mathfrak{o})$ ist leicht ersichtlich.

„⇐“ $(a_1 = a_2 = a_3 = 0) \Rightarrow \left(2a_1^2 + (a_1 - a_2)^2 + 2a_3^2 = 0\right)$ ist ebenfalls klar.

□

Kommen wir nunmehr zum Orthonormierungsverfahren:

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{1}{\|\mathfrak{a}_1\|} \cdot \mathfrak{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1,0,0)^T$$

$$\mathfrak{e}_2 = \frac{1}{\|\mathfrak{b}_2\|} \cdot \mathfrak{b}_2$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_2 &= \mathfrak{a}_2 - \varphi(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{e}_1 \\ &= (0,1,0)^T + \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1,0,0)^T \\ &= \left(\tfrac{1}{3}, 1, 0\right)^T \end{aligned}$$

$$\mathfrak{e}_2 = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}, 1, 0\right)^T$$

$$\mathfrak{e}_3 = \frac{1}{\|\mathfrak{b}_3\|} \cdot \mathfrak{b}_3$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_3 &= \mathfrak{a}_3 - \varphi(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{e}_1 - \varphi(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{e}_2) \cdot \mathfrak{e}_2 \\ &= (0,0,1)^T - 0 - 0 \\ &= (0,0,1)^T \end{aligned}$$

$$\mathfrak{e}_3 = \frac{1}{2} \cdot (0,0,1)^T$$

Die orthonormierte Basis lautet dann:

$$B := \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{9} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$$

15.2

$$\mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathfrak{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathfrak{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{a}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{1}{\|\mathfrak{a}_1\|} \cdot \mathfrak{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot (2,1,3,-1)^T$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_2 &= \mathfrak{a}_2 - \varphi(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{e}_1 \\
&= (7,4,3,-3)^T - 2\sqrt{15} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{15}}(2,1,3,-1)^T \\
&= (3,2,-3,-1)^T
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{e}_2 = \frac{1}{\|\mathfrak{b}_2\|} \cdot \mathfrak{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{23}} \cdot (3,2,-3,-1)^T$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_3 &= \mathfrak{a}_3 - \varphi(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{e}_1 - \varphi(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{e}_2) \cdot \mathfrak{e}_2 \\
&= (1,1,-6,0)^T + \sqrt{15} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{15}} \cdot (2,1,3,-1)^T - \sqrt{23} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{23}} \cdot (3,2,-3,-1)^T \\
&= (1,1,-6,0)^T + (2,1,3,-1)^T - (3,2,-3,-1)^T = \mathfrak{o}
\end{aligned}$$

Damit ist ersichtlich, daß $\mathfrak{a}_3$ von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ linear abhängig ist. Demzufolge müssen wir diesen Vektor nicht mehr beachten und definieren uns $\mathfrak{b}_3$ einfach neu:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_3 &:= \mathfrak{a}_4 - \varphi(\mathfrak{a}_4, \mathfrak{e}_1) \cdot \mathfrak{e}_1 - \varphi(\mathfrak{a}_4, \mathfrak{e}_2) \cdot \mathfrak{e}_2 \\
&= (5,7,7,8)^T - 2\sqrt{15} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{15}} \cdot (2,1,3,-1)^T - 0 \\
&= (1,5,1,10)^T
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{127}} \cdot (1,5,1,10)^T$$

Damit erhalten wir folgende Basis:

$$B := \left(\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{15}}{15} \\ \frac{\sqrt{15}}{15} \\ \frac{\sqrt{15}}{5} \\ -\frac{\sqrt{15}}{15} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{23}}{23} \\ \frac{2\sqrt{23}}{23} \\ -\frac{3\sqrt{23}}{23} \\ -\frac{\sqrt{23}}{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{127}}{127} \\ \frac{5\sqrt{127}}{127} \\ \frac{\sqrt{127}}{127} \\ \frac{10\sqrt{127}}{127} \end{pmatrix} \right)$$

15.3

Bedingung: $\|\mathfrak{a}\| := \sqrt{\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})}$

Behauptung: $\|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|^2 + \|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|^2 = 2 \cdot \left(\|\mathfrak{a}\|^2 + \|\mathfrak{b}\|^2\right)$

Beweis.

$$\begin{aligned}
& \varphi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{a}+\mathfrak{b}) + \varphi(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}, \mathfrak{a}-\mathfrak{b}) \\
=\ & (\varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) + \varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) + \varphi(\mathfrak{b},\mathfrak{a}) + \varphi(\mathfrak{b},\mathfrak{b})) + (\varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) - \varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) - \varphi(\mathfrak{b},\mathfrak{a}) + \varphi(\mathfrak{b},\mathfrak{b})) \\
=\ & 2 \cdot (\varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) + \varphi(\mathfrak{b},\mathfrak{b}))
\end{aligned}$$

□

Daß die Maximumnorm diese Eigenschaft nicht besitzt, läßt sich an folgendem einfachen Beispiel zeigen:

$$\mathfrak{a} := \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathfrak{b} := \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir:

$$\max_i |a_i + b_i|^2 + \max_i |a_i - b_i|^2 = 2 \cdot \left(\max_i |a_i|^2 + \max_i |b_i|^2 \right)$$

$$\begin{aligned} 8^2 + 10^2 &= 2 \cdot (8^2 + 5^2) \\ 164 &= 178 \end{aligned}$$

15.4

$B := (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}), \mathfrak{a}_{|B} := (1, 0, 3)^T, \mathfrak{b}_{|B} := (1, -6, 3)^T, \mathfrak{c}_{|B} := (-1, 0, 2)^T$

(a)

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ Basis von $\overrightarrow{V_3} \iff (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} \neq 0$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -18 - 12 = -30 \neq 0$$

Also ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ eine Basis von $\overrightarrow{V_3}$.

(b)

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ negativ orientiert $\iff (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} < 0$

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = -30 < 0$$

Damit sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ negativ, d. h. links orientiert. (Politische Vektoren? :-)

(c)

Nach der „Merkregel“ aus der Vorlesung, welche ich jetzt hier nicht noch einmal abzeichne, gilt, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ein Links- oder Rechtssystem bilden, so erfüllen $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{a}$ sowie $\mathfrak{c}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ die gleiche Bedingung.

Rechnerisch kann man das schnell folgendermaßen verdeutlichen:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{a} &= -30 \Rightarrow \text{links orientiert} \\
(\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b} &= -30 \Rightarrow \text{links orientiert} \\
(\mathfrak{c} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{a} &= 30 \Rightarrow \text{rechts orientiert} \\
(\mathfrak{a} \times \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{b} &= 30 \Rightarrow \text{rechts orientiert} \\
(\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{c} &= 30 \Rightarrow \text{rechts orientiert}
\end{aligned}$$

(d)

$$V := |(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}| = 30\,\text{VE}$$

$$\begin{aligned}
A &= 2 \cdot (|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| + |\mathfrak{a} \times \mathfrak{c}| + |\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}|) \\
&= 2 \cdot \left(\left|(18, 0, -6)^T\right| + \left|(0, -5, 0)^T\right| + \left|(-12, -5, -6)^T\right| \right) \\
&= 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{10} + 2 \cdot 5 + 2 \cdot \sqrt{205} \\
&= 12\sqrt{10} + 2\sqrt{205} + 10 \\
&\approx 76.58\,\text{FE}
\end{aligned}$$

15.5

Die normale Geradengleichung lautet folgendermaßen:

$$g : X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Die Plückersche Form davon läßt sich nun folgendermaßen darstellen:

$$g : \left(X - \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \mathfrak{o}$$

Ziehen wir nun den Betrag des Vektors $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ als Faktor mit hinzu, so erhalten wir die Plückersche Normalform:

$$g : \frac{1}{\sqrt{69}} \cdot \left(X - \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \mathfrak{o}$$

Der Abstand von R zur Geraden errechnet sich nun folgendermaßen:

$$l = \frac{1}{\sqrt{69}} \cdot \left| \left(R - \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{69}} \cdot \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{3909}}{\sqrt{69}} = \frac{\sqrt{29969}}{23}$$

$$l \approx 7.53\,\text{LE}$$

15.6

Hierfür genügt ein Gegenbeispiel:

$$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\8\\-4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\-16\\-38\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-18\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\4\\-2\end{pmatrix}$$