

14.1

gegeben:

$S := (A; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ist Koordinatensystem für \mathfrak{R}_3

$B = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ist orthonormiert

$P := (1; 1, 2, 3)^T$, $Q := (1; 0, 3, -1)^T$, $R := (1; -1, 2, 0)^T$,

$h : X := (1; 0, 1, 1)^T + t \cdot (0; 1, 1, 1)^T$,

$E : x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$,

$E' : X := (1; 2, 3, 1)^T + t_1 \cdot (0; 1, 0, 1)^T + t_2 \cdot (0; 0, 2, 1)^T$

(a)

$$g(P, Q) : X := (1; 1, 2, 3)^T + s \cdot (0; -1, 1, -4)^T, (s \in \mathbb{R})$$

(b)

$$\varepsilon(P, Q, R) : X := (1; 1, 2, 3)^T + p \cdot (0; -1, 1, -4)^T + q \cdot (0; -2, 0, -3)^T, (p, q \in \mathbb{R})$$

(c)

Zunächst brauchen wir einen Vektor \mathbf{e} , der senkrecht auf $(Q - P)$ und $(R - P)$ steht. $\mathbf{e} = (0; -3, 5, 2)^T$ erfüllt dieses Kriterium. Damit:

$$\varepsilon(P, Q, R) : \left(X - (1; 1, 2, 3)^T \right) \cdot (0; -3, 5, 2)^T = 0$$

oder:

$$\varepsilon(P, Q, R) : -3x + 5y + 2z - 13 = 0$$

(d)

Bei einer Ebenendarstellung der Form $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ ist $(0, a, b, c)$ der senkrechte Vektor auf der Ebene. teilt man nun die obige Gleichung durch den Betrag des Vektors, bringt man die Länge des Vektors auf 1 und erhält damit eine Hessesche Normalform:

$$E : \frac{\sqrt{6}}{6}x + \frac{\sqrt{6}}{6}y - \frac{\sqrt{6}}{3}z = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3}$$

(e)

Nach *Anwendungen des Skalarproduktes*, Punkt (4) gilt folgendes:

$$l = |A - A'| = |\mathbf{b}''|$$

wobei $\mathbf{b} := A - (1; 0, 1, 1)^T = (0; 0, -1, -1)^T$, \mathbf{b}'' sei die Normalkomponente von \mathbf{b} und A' die Projektion des Punktes A auf die Gerade h . Außerdem sei $\mathbf{a} = (0; 1, 1, 1)^T$ der

Fixpunkt der Parameterdarstellung von h . Dann gilt nach Punkt (3) des oben genannten Abschnittes:

$$\mathbf{b}'' = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a}^2} \cdot \mathbf{a}$$

Damit erhalten wir:

$$\mathbf{b}'' = \mathbf{b} - \frac{-2}{3} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{b}'' = (0; 0, -1, -1)^T + \left(0; \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T = \left(0; \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)^T$$

und somit

$$l = |\mathbf{b}''| = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(f)

Nach *Anwendungen des Skalarproduktes*, Punkt (6) gilt folgendes:

$$l = \left| \frac{(A - T) \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{e}|} \right|$$

wobei T ein Punkt der Ebene E ist. Ich habe hier $T := (1; 0, 0, -2)^T$ gewählt. Damit ergibt sich:

$$l = \left| \frac{\left((1; 0, 0, 0)^T - (1; 0, 0, -2)^T \right) \cdot (0; 1, 1, -2)^T}{\sqrt{6}} \right| = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3}$$

(g)

Zwei Ebenen, die sich in h schneiden, sind schnell gefunden:

$$\varepsilon_1 : X := (1; 0, 1, 1)^T + p \cdot (0; 1, 1, 1)^T + q \cdot (0; 2, 3, 4)^T$$

$$\varepsilon_2 : X := (1; 0, 1, 1)^T + r \cdot (0; 1, 1, 1)^T + s \cdot (0; 1, -5, 7)^T$$

Nun war ja nicht nach Parameterdarstellung sondern Hessescher Form gefragt, also:

$$\varepsilon_1 : x - 2 \cdot y + z + 1 = 0$$

$$\varepsilon_2 : 12 \cdot x - 6 \cdot y - 6 \cdot z - 12 = 0$$

(h)

Zunächst brauchen wir einen Vektor, der auf beiden Richtungsvektoren der Geraden senkrecht steht. Man kommt hier schnell auf:

$$\mathbf{e} = \left(0; -\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)^T$$

Nach *Anwendungen des Skalarproduktes*, Punkt (7) gilt folgendes:

$$l = \left| \frac{(U - V) \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{e}|} \right|$$

wobei hier U und V Punkte auf den Geraden sind, somit: $U = (1; 1, 2, 3)^T$ und $V = (1; 0, 1, 1)^T$. Das führt uns auf folgendes:

$$l = \left| \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{38}} \right| = \frac{\sqrt{38}}{19}$$

(i)

Die Punkte liegen irgendwo auf den Geraden:

$$T_1 = (1; 1, 2, 3)^T + r \cdot (0; -1, 1, -4)^T$$

$$T_2 = (1; 0, 1, 1)^T + s \cdot (0; 1, 1, 1)^T$$

Weiterhin verbindet der Vektor, der auf beiden Geraden senkrecht steht, die beiden Punkte:

$$T_1 = T_2 + t \cdot (0; -5, 3, 1)^T$$

Das führt uns auf folgende Gleichung, die alle drei Informationen verknüpft:

$$T_1 - T_2 = t \cdot (0; -5, 3, 1)^T = (0; 1, 1, 2)^T + r \cdot (0; -1, 1, -4)^T - s \cdot (0; 1, 1, 1)^T$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich nun einfach lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 2 \end{array} \right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & -1 \end{array} \right) \quad \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{19}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{18} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} r = \frac{2}{9} \\ s = \frac{19}{18} \\ t = \frac{1}{18} \end{array}$$

Das führt uns dann auf:

$$T_2 = (1; 0, 1, 1)^T + \frac{19}{18} \cdot (0; 1, 1, 1)^T = \left(1; \frac{19}{18}, \frac{37}{18}, \frac{37}{18} \right)^T$$

$$T_1 = \left(1; \frac{19}{18}, \frac{37}{18}, \frac{37}{18} \right)^T + \frac{1}{18} \cdot (0; -5, 3, 1)^T = \left(1; \frac{7}{9}, \frac{20}{9}, \frac{19}{9} \right)^T$$

(j)

Das einzige, was wir hier benötigen, sind drei Punkte der Ebene. Diese kann man schnell finden, da sie ja die vorgegebene Gleichung erfüllen müssen. Ich habe hier $(1; 7, 1, 2)^T$, $(1; 2, 4, 1)^T$ und $(1; 10, 0, 3)^T$ genommen. Das führt uns dann zu folgender Parameterdarstellung:

$$E : X := (1; 7, 1, 2)^T + r \cdot (0; -5, 3, -1)^T + s \cdot (0; 3, -1, 1)^T$$

(k)

Hier ist ein solcher Vektor schon durch die Definition von E gegeben: $(0; 1, 1, -2)^T$

(l)

Da die Ebene auf h senkrecht stehen soll, bietet sich eine Hessesche Form an, gleichzeitig muß sie den Koordinatenursprung enthalten, also können wir die Hessesche Form durch

$$\varepsilon' : (X - A) \cdot \mathbf{e}$$

mit $\mathbf{e} = (0; 1, 1, 1)$ definieren. Oder anders aufgeschrieben:

$$\varepsilon' : X := x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

(m)

Anfängliche Betrachtung: Für die Schnittmenge brauchen wir eine Beschreibung der zu dieser Menge gehörigen Punkte:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies führt uns auf das folgende Gleichungssystem in Matrixschreibweise (der Koeffizientenvektor ist $(r, s, t_1, t_2)^T$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 & | & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -2 & | & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & | & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Folglich ist die Schnittgerade dieser beiden Ebenen

$$E \cap E' = (1; 0, 0, -1)^T + t \cdot (0; 1, 0, 0)^T$$

(n)

Da das Koordinatensystem von ε nun $S' := (R; \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ ist, läßt sich P einfach als $R - \overrightarrow{PR}$ beschreiben. Folglich:

$$P_{S'} = (1; 0, -1)$$

(o)

Zunächst suchen wir einen Punkt, der den Abstand 2 von E hat:

$$\frac{x_1 + x_2 - 2x_3 - 4}{\sqrt{6}} = 2$$

Der Einfachheit halber legen wir x_1 und x_2 auf 0 fest:

$$-\frac{2}{\sqrt{6}}x_3 - \frac{4}{\sqrt{6}} = 2$$

$$x_3 = -2 - \sqrt{6}$$

Das führt uns auf den Punkt $(1; 0, 0, -2 - \sqrt{6})^T$ und da die neue Ebene parallel zu E sein muß, können wir die Richtungsvektoren beibehalten. Damit erhalten wir folgende Ebenendarstellung:

$$E'' : X := (1; 0, 0, -2 - \sqrt{6})^T + r \cdot (0; -5, 3, -1)^T + s \cdot (0; 3, -1, 1)^T$$

(p)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -5 & 3 & -7 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) & \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 7 \\ 0 & 8 & -4 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 6 \end{array} \right) \\ & \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{21}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Damit ist das Gleichungssystem nicht lösbar und die Gerade liegt offensichtlich parallel zu der Ebene.

14.2

Behauptung: $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ ist Skalarprodukt des Vektorraumes $V := {}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^{n \times 1}$

Im Ermangelung des Buches und aufgrund des in der Vorlesung etwas kurz abgehandelten Themas *Komplexe Zahlen* werde ich im folgenden einige kleinere Dinge selbst herleiten müssen.

Lemma 1 $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$ für $x, y \in \mathbb{C}$ sowie $x := a_x + b_x \cdot i$ und $y := a_y + b_y \cdot i$

$$\begin{aligned} \overline{x + y} &= \overline{(a_x + b_x i) + (a_y + b_y i)} \\ &= \overline{(a_x + a_y) - i \cdot (b_x + b_y)} \\ &= \overline{(a_x - i \cdot b_x) + (a_y - i \cdot b_y)} \\ &= \bar{x} + \bar{y} \end{aligned}$$

Lemma 2 $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ für $x, y \in \mathbb{C}$ sowie $x := a_x + b_x \cdot i$ und $y := a_y + b_y \cdot i$

$$\begin{aligned} \overline{x \cdot y} &= \overline{(a_x + b_x i) \cdot (a_y + b_y i)} \\ &= \overline{(a_x a_y - b_x b_y) + i \cdot (a_x b_y + a_y b_x)} \\ &= \overline{(a_x a_y - b_x b_y) - i \cdot (a_x b_y + a_y b_x)} \\ &= \overline{(a_x a_y - b_x b_y) + i \cdot (-a_x b_y - a_y b_x)} \\ &= \overline{(a_x - b_x i) \cdot (a_y - b_y i)} \\ &= \bar{x} \cdot \bar{y} \end{aligned}$$

(Hmm ... zwei Lemmata – ist das dann ein Di-lemma?)

Beweis. zu zeigen:

(1) Bilinear:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V : \forall a, b, c \in \mathbb{C} :$$

$$\varphi(a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b}, \mathbf{c}) = a \cdot \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + b \cdot \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad \wedge$$

$$\varphi(\mathbf{a}, b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c}) = \bar{b} \cdot \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \bar{c} \cdot \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{c})$$

(2) hermitesch:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V :$$

$$\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \overline{\varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a})}$$

(3) positiv definit:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) &\geq 0 \quad \wedge \\ (\forall \mathbf{a} \in V : \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0) &\iff \mathbf{a} = \mathbf{o} \end{aligned}$$

Ein paar kleine Definitionen vorweg:

$$\mathbf{a} := (0; a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\mathbf{b} := (0; b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$\mathbf{c} := (0; c_1, c_2, \dots, c_n)$$

\sum_k sei eine Kurzschreibweise für $\sum_{k=1}^n$

$\Re(x)$ bezeichne den Realteil der komplexen Zahl x

$\Im(x)$ bezeichne den Imaginärteil der komplexen Zahl x

(1)

$$(a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b})^T \cdot \bar{\mathbf{c}} = a \cdot (\mathbf{a}^T \cdot \bar{\mathbf{c}}) + b \cdot (\mathbf{b}^T \cdot \bar{\mathbf{c}})$$

$$\begin{aligned} \sum_k ((a \cdot a_k + b \cdot b_k) \cdot \bar{c}_k) &= a \cdot \sum_k (a_k \cdot \bar{c}_k) + b \cdot \sum_k (b_k \cdot \bar{c}_k) \\ &= \sum_k (a \cdot (a_k \cdot \bar{c}_k)) + \sum_k (b \cdot (b_k \cdot \bar{c}_k)) \\ &= \sum_k (a \cdot (a_k \cdot \bar{c}_k) + b \cdot (b_k \cdot \bar{c}_k)) \\ &= \sum_k ((a \cdot a_k + b \cdot b_k) \cdot \bar{c}_k) \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \overline{(b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c})} = \bar{b} \cdot (\mathbf{a}^T \cdot \bar{\mathbf{b}}) + \bar{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{c}})$$

$$\sum_k (a_k \cdot \overline{b \cdot b_k + c \cdot c_k}) = \bar{b} \cdot \sum_k (a_k \cdot \bar{b}_k) + \bar{c} \cdot \sum_k (a_k \cdot \bar{c}_k)$$

Nach Lemma 1 ergibt sich

$$\sum_k (a_k \cdot \overline{b \cdot b_k + c \cdot c_k}) = \bar{b} \cdot \sum_k (a_k \cdot \bar{b}_k) + \bar{c} \cdot \sum_k (a_k \cdot \bar{c}_k)$$

Weiterhin nach Lemma 2:

$$\begin{aligned} \sum_k (a_k \cdot (\bar{b} \cdot \bar{b}_k + \bar{c} \cdot \bar{c}_k)) &= \bar{b} \cdot \sum_k (a_k \cdot \bar{b}_k) + \bar{c} \cdot \sum_k (a_k \cdot \bar{c}_k) \\ &= \sum_k (\bar{b} \cdot (a_k \cdot \bar{b}_k)) + \sum_k (\bar{c} \cdot (a_k \cdot \bar{c}_k)) \\ &= \sum_k (\bar{b} \cdot (a_k \cdot \bar{b}_k) + \bar{c} \cdot (a_k \cdot \bar{c}_k)) \\ &= \sum_k (a_k \cdot (\bar{b} \cdot \bar{b}_k + \bar{c} \cdot \bar{c}_k)) \end{aligned}$$

(2)

$$\mathbf{a}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}}$$

$$\begin{aligned} \sum_k (a_k \cdot \bar{b}_k) &= \overline{\sum_k (b_k \cdot \bar{a}_k)} \\ &= \overline{\sum_k ((\Re(b_k) + \Im(b_k) \cdot i) \cdot (\Re(a_k) - \Im(a_k) \cdot i))} \\ &= \overline{\sum_k ((\Re(a_k) \cdot \Re(b_k) + \Im(a_k) \cdot \Im(b_k)) + i \cdot (\Re(a_k) \cdot \Im(b_k) - \Im(a_k) \cdot \Re(b_k)))} \\ &= \sum_k ((\Re(a_k) \cdot \Re(b_k) + \Im(a_k) \cdot \Im(b_k)) - i \cdot (\Re(a_k) \cdot \Im(b_k) - \Im(a_k) \cdot \Re(b_k))) \\ &= \sum_k ((\Re(a_k) + \Im(a_k) \cdot i) \cdot (\Re(b_k) - \Im(b_k) \cdot i)) \\ &= \sum_k (a_k \cdot \bar{b}_k) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} &\geq 0 \\ \sum_k (a_k \cdot \bar{a}_k) &\geq 0 \\ \sum_k ((\Re(a_k) + \Im(a_k) \cdot i) \cdot (\Re(a_k) - \Im(a_k) \cdot i)) &\geq 0 \\ \sum_k \left(\underbrace{\Re(a_k)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\Im(a_k)^2}_{\geq 0} + i \cdot \underbrace{(\Re(a_k) \cdot \Im(a_k) - \Re(a_k) \cdot \Im(a_k))}_0 \right) &\geq 0 \quad \circledast \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{o}$$

„ \Leftarrow “ (unter Verwendung von \circledast):

$$(\mathbf{a} = \mathbf{o}) \Rightarrow \left(\sum_k (\Re(a_k)^2 + \Im(a_k)^2) = 0 \right)$$

ist recht offensichtlich.

„ \Rightarrow “ (ebenfalls unter Verwendung von \circledast):

$$\left(\sum_k (\Re(a_k)^2 + \Im(a_k)^2) = 0 \right) \Rightarrow (\mathbf{a} = \mathbf{o})$$

$$\left(\sum_k (\Re(a_k)^2) + \sum_k (\Im(a_k)^2) = 0 \right) \Rightarrow (\mathbf{a} = \mathbf{o})$$

$$\left(\sum_k (\Re(a_k))^2 = - \sum_k (\Im(a_k))^2 \right) \Rightarrow (\mathbf{a} = \mathbf{o})$$

Dieses Kriterium kann nur für $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ erfüllt werden, da nach obigem Beweis gilt, daß $\Re(a_k)^2 \geq 0$ sowie $\Im(a_k)^2 \geq 0$.

□