

13.1

Bedingung: K und E sind Körper, $K \subseteq E$.

Behauptung: E ist Vektorraum über K .

Beweis. Zu zeigen:

1. K ist Körper.
2. innere Verknüpfung $+$ und äußere Verknüpfung \cdot , so daß gilt:
 $(E; +)$ ist abelsche Gruppe
 $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E : \forall \alpha, \beta \in K :$
 $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$
 $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{a}$
 $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{a}$
 $\alpha \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \cdot \mathbf{a} + \alpha \cdot \mathbf{b}$

1. gilt lt. Voraussetzung.
2. $(E; +)$ ist abelsche Gruppe gilt, da E Körper.
 $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ gilt, da 1 Einselement bzgl. \cdot ist.
 $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{a}$ gilt, da $K \subseteq E$ und E Körper (Assoziativität der abelschen Gruppe $(E; \cdot)$).
 $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{a}$ gilt, da $K \subseteq E$ und E Körper (Distributivität eines Ringes).
 $\alpha \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \cdot \mathbf{a} + \alpha \cdot \mathbf{b}$ gilt, da $K \subseteq E$ und E Körper (Distributivität eines Ringes).

Die letzten drei Axiome nutzen die Tatsache aus, daß $K \subseteq E$ ist und damit sämtliche beteiligten Werte tatsächlich aus E kommen – somit können die Körpereigenschaften von E für den Beweis herangezogen werden. □

13.2

(a)

$$T_1 := \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \mid x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

Nach Satz 56 muß gelten: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{4 \times 1} : \forall \alpha, \beta \in T_1 : \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} \in T_1$.

Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_1$ mit $\mathbf{a} := (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$, $\mathbf{b} := (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 \\ \alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 \\ \alpha \cdot a_3 + \beta \cdot b_3 \\ \alpha \cdot a_4 + \beta \cdot b_4 \end{pmatrix} \in T_1$$

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2) + 4 \cdot (\alpha \cdot a_3 + \beta \cdot b_3) - (\alpha \cdot a_4 + \beta \cdot b_4) &= 0 \\ \alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 + 4\alpha \cdot a_3 + 4\beta \cdot b_3 - \alpha \cdot a_4 - \beta \cdot b_4 &= 0 \\ \alpha \cdot (a_2 + 4 \cdot a_3 - a_4) + \beta \cdot (b_2 + 4 \cdot b_3 - b_4) &= 0 \\ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist T_1 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{4 \times 1}$.

(b)

$$T_2 := \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \mid x_1 + x_2 = 3 \right\}$$

Seien analog wie bei (a) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_2$ mit $\mathbf{a} := (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$, $\mathbf{b} := (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 \\ \alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 \\ \alpha \cdot a_3 + \beta \cdot b_3 \\ \alpha \cdot a_4 + \beta \cdot b_4 \end{pmatrix} \in T_2 \\ (\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1) + (\alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2) &= 3 \\ \alpha \cdot (a_1 + a_2) + \beta \cdot (b_1 + b_2) &= 3 \\ \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 3 &= 3 \end{aligned}$$

Wie leicht zu sehen ist, ist diese Gleichung definitiv nicht für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ erfüllt, demnach ist T_2 kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{4 \times 1}$.

(c)

$$T_3 := \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \mid x_1 \in \mathbb{Q} \right\}$$

Den vorangegangenen Teilaufgaben folgend, könnte man hier gleichermaßen herangehen, allerdings genügt ein Gegenbeispiel, um nachzuweisen, daß T_3 kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{4 \times 1}$ ist. Beispielsweise reicht eine Multiplikation eines Vektors aus T_3 mit einer beliebigen irrationalen Zahl, beispielsweise $\sqrt{2}$, um das Kriterium nicht mehr zu erfüllen.

13.3

Die Dimension ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes sowie die Mächtigkeit der Basis desselbigen. Zunächst steht also die Frage, ob die Vektoren \mathbf{a}_1 bis \mathbf{a}_4 vielleicht schon als Basis ausreichend wären. Prüfen wir also zunächst deren lineare Abhängigkeit:

$$\begin{aligned} &\text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 + 2i & -i & 0 \\ 2 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2i & 1 + i & -1 - i \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 - i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 - i & -1 - i \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 - 2i & -1 - i \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 + 2i & -i & 0 \\ 0 & 1 & 1 + 2i & -1 - i \\ 0 & 0 & 1 + 2i & -i \\ 0 & 0 & -1 - i & -1 - i \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 + 2i & -i & 0 \\ 0 & 1 & 1 + 2i & -1 - i \\ 0 & 0 & 1 + 2i & -i \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i \end{pmatrix} = 4 \end{aligned}$$

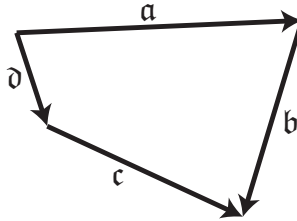
Damit genügt schon das erzeugende System als Basis, da sämtliche Vektoren linear unabhängig sind:

$$B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$$

Die Dimension des Vektorraumes ist demnach 4. Das Kriterium, daß $[B]$ den Vektorraum selbst erzeugen soll, ist nach Voraussetzung ebenfalls gegeben.

13.4

Bedingung: Die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ bilden folgendermaßen ein beliebiges Viereck:



so daß gilt:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{d} + \mathbf{c}$$

(hier sind lediglich die Richtungen relevant für die folgenden Betrachtungen)

Behauptung: Die Verbindung der Mittelpunkte benachbarter Seiten bildet stets ein Parallelogramm.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{d} + \mathbf{c}$$

folglich auch:

$$\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$$

Weiterhin gilt auch:

$$\mathbf{d} - \mathbf{c} = \mathbf{d} - \mathbf{a}$$

und analog:

$$\frac{1}{2}\mathbf{d} - \frac{1}{2}\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{d} - \frac{1}{2}\mathbf{a}$$

□

Womit ersichtlich ist, daß die jeweils gegenüberliegenden Seiten sowohl parallel als auch gleich lang sind. Folglich gilt die Behauptung.

13.5

Zunächst gilt es wieder herauszufinden, ob die Vektoren aus U und W linear abhängig voneinander sind und somit evtl. eine direkte Summe nicht möglich ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(U, W) &= \operatorname{rg} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{array} \right) \\ &= \operatorname{rg} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array} \right) = 4 \end{aligned}$$

Folglich gibt es keine linearen Abhängigkeiten zwischen U und W und somit ist $U + W$ eine direkte Summe.

13.6

Bedingung: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}V$

$$\mathbf{x} := \mathbf{b} + \mathbf{c}; \mathbf{y} := \mathbf{a} + \mathbf{c}; \mathbf{z} := \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

(a)

Behauptung: $[\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}] = [\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}]$

Beweis.

$$[\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}] = [\{\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b}\}]$$

$\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \{\alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c}\} &= \{\lambda \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mu \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + \nu \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})\} \\ &= \{\lambda \cdot \mathbf{b} + \lambda \cdot \mathbf{c} + \mu \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{c} + \nu \cdot \mathbf{a} + \nu \cdot \mathbf{b}\} \\ &= \{\mathbf{a} \cdot (\mu + \nu) + \mathbf{b} \cdot (\lambda + \nu) + \mathbf{c} \cdot (\lambda + \mu)\} \end{aligned}$$

Wie leicht ersichtlich ist, führt uns das auf folgendes:

$$\alpha = \mu + \nu; \beta = \lambda + \nu; \gamma = \lambda + \mu \quad \textcircled{*}$$

Man sieht hier, daß die Faktoren für die Bildung des Abschlusses ziemlich austauschbar und somit beide Mengen tatsächlich äquivalent sind. \square

(b)

Behauptung: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ l. u. $\iff \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ l. u.

Beweis.

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \text{ l. u.} \iff (\lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{y} + \nu \cdot \mathbf{z} = \mathbf{o} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ l. u.} &\iff (\alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c} = \mathbf{o} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0) \\ &\stackrel{\textcircled{*}}{\iff} ((\mu + \nu) \cdot \mathbf{a} + (\lambda + \nu) \cdot \mathbf{b} + (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{o} \Rightarrow \mu + \nu = \lambda + \nu = \lambda + \mu = 0) \\ &\iff (\lambda \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mu \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + \nu \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{o} \Rightarrow \mu + \nu = \lambda + \nu = \lambda + \mu = 0) \\ &\iff (\lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{y} + \nu \cdot \mathbf{z} = \mathbf{o} \Rightarrow \mu + \nu = \lambda + \nu = \lambda + \mu = 0) \end{aligned}$$

Das führt uns auf:

$$\begin{aligned} \mu + \nu &= 0 \\ \lambda + \nu &= 0 \\ \lambda + \mu &= 0 \end{aligned}$$

was wiederum durch einfache Umformungen folgendes ergibt:

$$\mu = -\nu$$

$$\begin{aligned} \lambda &= -\nu \\ \lambda &= \mu \end{aligned}$$

$$\lambda + \lambda = 0$$

und damit:

$$\lambda = \mu = \nu = 0$$

□

(a) und (b) lassen sich auch problemlos auf Vektorräume über beliebigen Körpern anwenden, da für die Beweise nur Eigenschaften von Körpern angewandt wurden, ohne es explizit auf lediglich einen Körper zu beschränken.

13.7

Bedingung:

$$V := {}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{4 \times 1}$$

$$U := \left[\left\{ (1, 0, 1, 2)^T, (0, 1, 1, 1)^T \right\} \right]$$

$$W := \left[\left\{ (1, 1, 4, 0)^T, (2, -3, -1, 1)^T, (3, 1, 0, 0)^T \right\} \right]$$

Behauptung: Die Dimensionsformel für Untervektorräume lautet:

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$$

Beweis. $\dim U = 2$ ist leicht ersichtlich.

$$\dim W = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -9 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -9 & -12 \end{pmatrix} = 3$$

$$\dim(U + W) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} = 4$$

Um nun die Dimension von $(U \cap W)$ zu bestimmen, löst man das Gleichungssystem (U, W) , um den linear abhängigen Vektor zu finden.

$$\begin{aligned} (U, W) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -7 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist der Vektor $(2, -3, -1, 1)^T$ linear abhängig von den Vektoren in U , womit gilt:

$$U \cap W = \left[\left\{ (2, -3, -1, 1)^T \right\} \right]$$

und damit

$$\dim(U \cap W) = 1$$

Womit dann auch die Dimensionsformel erfüllt ist:

$$\begin{array}{ccccccc} \dim U & + & \dim W & = & \dim(U + W) & + & \dim(U \cap W) \\ 2 & + & 3 & = & 4 & + & 1 \\ & & & & 5 & & 5 \end{array}$$

□

13.8

Bedingung: $V := \mathbb{R}\mathbb{R}^{4 \times 1}$

(a)

Behauptung: $B := \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ mit $\mathbf{b}_1 := (0, 1, 1, 1)^T$, $\mathbf{b}_2 := (1, 0, 1, 1)^T$, $\mathbf{b}_3 := (1, 1, 0, 1)^T$, $\mathbf{b}_4 := (1, 1, 1, 0)^T$ ist Basis von V .

Beweis. Zunächst müssen die Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ linear unabhängig sein:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 4 \end{aligned}$$

Weiterhin gilt nach Satz 54, Folgerung (4): das LGS

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & 0 & d \end{array} \right)$$

mit $\mathfrak{A} := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$ und $\mathfrak{d} := (a, b, c, d)^T \in V$ hat genau eine Lösung $\iff \operatorname{rg}\mathfrak{A} = \operatorname{rg}(\mathfrak{A}, \mathfrak{d}) = 4$. Da der Rang der Koeffizientenmatrix, wie oben zu sehen ist, schon 4 beträgt, wird er sich durch die zusätzliche Spalte mit dem Ergebnisvektor auch nicht mehr ändern. Damit läßt sich mit diesen vier Vektoren ein beliebiger Vektor aus V darstellen und somit ist B eine Basis von V . □

(b)

$$\mathfrak{a} := (2, 5, 0, 5)^T$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 7 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}|_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\mathfrak{A}(B, B') := \left(\mathbf{b}'_{1|B}, \mathbf{b}'_{2|B}, \mathbf{b}'_{3|B}, \mathbf{b}'_{4|B} \right)$$

Demnach lösen wir folgende Gleichungssysteme

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

was uns nach den selben Umformungsschritten wie in (b) auf

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right)$$

und damit auf die Übergangsmatrix

$$\mathfrak{A}(B, B') = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

führt.

13.10

Wir wissen, daß der Mittelpunkt der Strecke \overline{AC} (im folgenden mit M_{AC} bezeichnet) auf der y -Achse und der Mittelpunkt der Strecke \overline{BC} (im folgenden mit M_{BC} bezeichnet) in der x - z -Ebene liegt. Damit können wir schon mal die folgenden Prototypen für die Mittelpunkte bauen:

$$M_{AC} = (1; 0; y_{AC}; 0); \quad M_{BC} = (1; x_{BC}; 0; z_{BC})$$

Weiterhin haben wir ein Dreieck, also muß folgendes gelten:

$$A + 2 \cdot \overrightarrow{AM_{AC}} = B + 2 \cdot \overrightarrow{BM_{BC}} = C$$

In Zahlen erhalten wir damit folgendes:

$$\begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 0 \\ (-4) + 2 \cdot 4 \\ (-1) + 2 \cdot (y_{AC} + 1) \\ 2 + 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 + 2 \cdot (x_{BC} - 3) \\ 5 + 2 \cdot (-5) \\ (-16) + 2 \cdot (z_{BC} + 16) \end{pmatrix}$$

stellen wir das nach den Variablen um, die wir ausrechnen wollen (und lassen die Erkennungskoordinate weg, sie ergibt recht offensichtlich das erwartete Ergebnis):

$$\begin{aligned}x_{BC} &= \frac{7}{2} \\y_{AC} &= -3 \\z_{BC} &= -9\end{aligned}$$

Damit haben wir die Koordinaten der Mittelpunkte bestimmt und können nunmehr auch die Koordinaten von C ausrechnen:

$$M_{AC} = (1; 0; -3, 0); \quad M_{BC} = \left(1; \frac{7}{2}, 0, -9\right)$$

$$C = A + 2 \cdot \overrightarrow{AM_{AC}} = (1; 4, -5, -2)$$