

11.5

(b) **Nachbemerkung:** Leider hatte der eine verwendete Hammer überraschend seine Selbstkritik und Daseinsverneinung aufgegeben und lieferte aufgrund eines fehlenden *not* die falschen Ergebnisse. Die richtige Lösung wäre gewesen:

$$\mathfrak{A} \text{ ist invertierbar} \iff \det \mathfrak{A} \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25\}$$

12.1

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 7 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{array} \right)$$

Man wähle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Damit erhalten wir folgendes Ergebnis (netterweise völlig ohne freie Variablen):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_4$$

Da es ein homogenes Gleichungssystem ist, können wir gefahrlos die Ergebnisspalte weglassen, da sie sich ohnehin nicht ändert.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ & \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man wähle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

12.2

Behauptung: *Das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + 6x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

besitzt keine Lösung.

Beweis. Nach Satz 54 (2) gilt

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b} \text{ hat keine Lösungen} \iff \text{rg } \mathfrak{A} < \text{rg}(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$$

Demnach definieren wir folgendes:

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \mathfrak{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Folglich ermitteln wir zunächst den Rang der beiden in Frage kommenden Matrizen:

$$\begin{aligned} \text{rg } \mathfrak{A} &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \end{aligned}$$

Sowie

$$\text{rg}(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 4$$

Wie ersichtlich ist, gilt $\operatorname{rg} \mathfrak{A} < \operatorname{rg} (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ und damit die Behauptung, daß das Gleichungssystem keine Lösung besitzt. \square

12.3

Zunächst versuchen wir, eine allgemeine Lösung zu entwickeln:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & -3 & -5 & a & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & b \end{array} \right) & \leftrightarrow & \left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & -3 & -5 & a & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 11 & 9 & 2b \\ 3 & -2 & -4 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & b \end{array} \right) \\ & \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & a-4 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 11 & 9 & 2b \\ 3 & -2 & -4 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & b \end{array} \right) & \leftrightarrow & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & a-4 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 11 & 9 & 2b \\ 0 & 4 & -4 & 14 & 16 & 2+3b \\ -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & b \end{array} \right) \\ & \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & a-4 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 11 & 9 & 2b \\ 0 & 4 & -4 & 14 & 16 & 2+3b \\ 0 & 3 & 3 & a & 1 & b \end{array} \right) & \leftrightarrow & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & a-4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & -7 & -2-b \\ 0 & 4 & -4 & 14 & 16 & 2+3b \\ 0 & 3 & 3 & a & 1 & b \end{array} \right) \\ & \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & a-1 & 3 & 2+b \\ 0 & 1 & 5 & -3 & -7 & -2-b \\ 0 & 0 & -24 & 26 & 44 & 10+7b \\ 0 & 0 & -12 & a+9 & 22 & 6+4b \end{array} \right) & \leftrightarrow & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & a-1 & 3 & 2+b \\ 0 & 1 & 5 & -3 & -7 & -2-b \\ 0 & 0 & 0 & 8-2a & 0 & -2-b \\ 0 & 0 & -12 & a+9 & 22 & 6+4b \end{array} \right) \\ & \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & a-1 & 3 & 2+b \\ 0 & 1 & 5 & -3 & -7 & -2-b \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a}{12} - \frac{3}{4} & -\frac{11}{6} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}b \\ 0 & 0 & 0 & 8-2a & 0 & -2-b \end{array} \right) & \leftrightarrow & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6}a - \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} & 1 + \frac{1}{3}b \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{12}a + \frac{3}{4} & \frac{13}{6} & \frac{1}{2} + \frac{2}{3}b \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a}{12} - \frac{3}{4} & -\frac{11}{6} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}b \\ 0 & 0 & 0 & 8-2a & 0 & -2-b \end{array} \right) \end{aligned}$$

Hieraus wird ersichtlich, daß für $a = 4$ die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems nicht existiert (inwieweit dies tatsächlich einer Änderung ihrer Struktur darstellt, vermag ich nicht zu sagen) oder für $b = -2$ eine freie Variable mehr hat, nämlich zwei, statt wie bei beliebigem anderen a nur eine.

Die Lösbarkeit in Abhängigkeit von b definiert sich über den Rang von Koeffizienten- und Systemmatrix. Offenbar können wir ein beliebiges $a \neq 4$ wählen und die Lösbarkeit bleibt unabhängig von b , da der Rang durch die Diagonale aus Elementen $\neq 0$ eindeutig auf 4 festgelegt ist, in Koeffizienten- wie Systemmatrix. Für den Fall $a = 4$ ist der Rang der Koeffizientenmatrix offensichtlich 3, der der Systemmatrix allerdings für ein $b \neq -2$ ergibt 4. Damit gilt nach Satz 54 (2), daß es keine Lösung gibt. Demzufolge ist das einzige tatsächlich abhängige b für den Fall, daß $a = 4$ ist, -2 ; ansonsten hat b keinerlei Einfluß auf die Lösbarkeit, allein vorausgesetzt, daß man ein $a \neq 4$ wählt.

Für den Spezialfall $a = 4$ (hier dann mal $b = -2$ festgelegt, da ja nach Lösungen gefragt war) ergibt sich dann folgende Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{12} & \frac{13}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{12} & -\frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{array} \right)$$

Die Lösungen für $a = 4$, wären dann folgende: Man wähle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{29}{12} \\ \frac{13}{12} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{13}{6} \\ \frac{11}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

12.4

Es existieren nach Satz 54 genau dann nichttriviale Lösungen für ein homogenes LGS, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als die Anzahl der Variablen ist. Also suchen wir die Fälle, wo der Rang kleiner als 4 wird:

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 - t^2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 - t^2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg} \mathfrak{A} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 - t^2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 - t^2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 - t^2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 - t^2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg} \mathfrak{A} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 - t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - t^2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -10 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 - t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - t^2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg} \mathfrak{A} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -10 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4-t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t^2 \end{pmatrix}$$

Hieraus wird ersichtlich, daß $\operatorname{rg} \mathfrak{A}$ genau dann kleiner als 4 wird, wenn $t \in \{\pm 1, \pm 2\}$

12.5

$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathfrak{A}} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{A}^{-1} = -\frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & -18 \\ 0 & 5 & -10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Irgendwie ist das Verfahren über Determinanten etwas ... aufwendig bei größeren Matrizen ... also hier noch einmal nach Gauß-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \end{array} \right) \quad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -1 & 2 & -4 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right)$$