

11.1

(a)

$$\mathfrak{A}^{-1} := \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =: |x_{ij}|_3$$

Eine Multiplikation der Matrix \mathfrak{A} mit ihrer (noch unbekanntem) Inversen führt uns auf folgende drei Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} 2x_{11} + 6x_{21} + 4x_{31} &= 1 \\ -2x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 0 \\ 2x_{21} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_{12} + 6x_{22} + 4x_{32} &= 0 \\ -2x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 1 \\ 2x_{22} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_{13} + 6x_{23} + 4x_{33} &= 0 \\ -2x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 0 \\ 2x_{23} &= 1 \end{aligned}$$

Diese kann man mit Hilfe der Cramerschen Regel lösen und erhält so folgende Matrix:

$$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathfrak{A}|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Zunächst:

$$|\mathfrak{A}| = 4 \cdot (-2) \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = -20$$

Damit:

$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

(b)

$$b = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 15 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 12 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Nach einigen Umformungen, die ich jetzt hier aus Platzgründen nicht wiedergebe folgt:

$$b = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 9 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 13 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Weiterhin dann am Ende:

$$b = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{43}{103} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{103} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{103} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{103}{131} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

(c)

$$\mathfrak{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dazu nun zunächst die ersten beiden Faktoren im Falkschen Schema multipliziert:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 4 & 0 & -1 & 1 \\ & & & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 8 & 7 & -1 & 6 \end{array}$$

Und dann noch mit dem letzten Faktor:

$$\begin{array}{cccc|cc} & & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \\ \hline 4 & 2 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & -1 & 6 & 6 & 7 \end{array}$$

Damit:

$$\mathfrak{e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

11.2

Voraussetzung: $\mathfrak{A} \in K_r^{n \times n}$

Behauptung: $(\mathfrak{A}^{-1})^T = (\mathfrak{A}^T)^{-1}$

Beweis. Zunächst können wir uns \mathfrak{A} folgendermaßen veranschaulichen:

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Damit ist \mathfrak{A}^{-1} nach Berechnung über Adjunkten und Cramersche Regel ($A := |\mathfrak{A}|$):

$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{A} & \frac{A_{21}}{A} & \cdots & \frac{A_{n-1,1}}{A} & \frac{A_{n1}}{A} \\ \frac{A_{12}}{A} & \frac{A_{22}}{A} & \cdots & \frac{A_{n-1,2}}{A} & \frac{A_{n2}}{A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{A_{1,n-1}}{A} & \frac{A_{2,n-1}}{A} & \cdots & \frac{A_{n-1,n-1}}{A} & \frac{A_{n,n-1}}{A} \\ \frac{A_{1n}}{A} & \frac{A_{2n}}{A} & \cdots & \frac{A_{n-1,n}}{A} & \frac{A_{nn}}{A} \end{pmatrix}$$

Transponieren wir diese Matrix nun, erhalten wir

$$(\mathfrak{A}^{-1})^T = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{A} & \frac{A_{12}}{A} & \cdots & \frac{A_{1,n-1}}{A} & \frac{A_{1n}}{A} \\ \frac{A_{21}}{A} & \frac{A_{22}}{A} & \cdots & \frac{A_{2,n-1}}{A} & \frac{A_{2n}}{A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{A_{n-1,1}}{A} & \frac{A_{n-1,2}}{A} & \cdots & \frac{A_{n-1,n-1}}{A} & \frac{A_{n-1,n}}{A} \\ \frac{A_{n1}}{A} & \frac{A_{n2}}{A} & \cdots & \frac{A_{n,n-1}}{A} & \frac{A_{nn}}{A} \end{pmatrix}$$

Ebenso können wir mit der anderen Seite der Behauptung verfahren und erhalten

$$\mathfrak{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n-1,1} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n-1,2} & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n,n-1} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(\mathfrak{A}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{A} & \frac{A_{12}}{A} & \cdots & \frac{A_{1,n-1}}{A} & \frac{A_{1n}}{A} \\ \frac{A_{21}}{A} & \frac{A_{22}}{A} & \cdots & \frac{A_{2,n-1}}{A} & \frac{A_{2n}}{A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{A_{n-1,1}}{A} & \frac{A_{n-1,2}}{A} & \cdots & \frac{A_{n-1,n-1}}{A} & \frac{A_{n-1,n}}{A} \\ \frac{A_{n1}}{A} & \frac{A_{n2}}{A} & \cdots & \frac{A_{n,n-1}}{A} & \frac{A_{nn}}{A} \end{pmatrix}$$

Damit gilt $(\mathfrak{A}^{-1})^T = (\mathfrak{A}^T)^{-1}$

□

11.3

Es gilt: $\text{rg}\mathfrak{A} = 4$, unabhängig vom t .

11.4

Zunächst stellen wir ein wenig um:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{B} &= \mathfrak{E}_3 \\
 \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{X} &= \mathfrak{E}_3 \cdot \mathfrak{B}^{-1} \\
 \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{X} &= \mathfrak{B}^{-1} \\
 (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{X})^{-1} &= \mathfrak{B} \\
 \mathfrak{X}^{-1} \cdot \mathfrak{A}^{-1} &= \mathfrak{B} \\
 \mathfrak{X}^{-1} &= \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} \\
 \mathfrak{X} &= (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A})^{-1}
 \end{aligned}$$

Daraus ist ersichtlich, daß \mathfrak{X} sich aus dem invertierten Produkt von \mathfrak{B} und \mathfrak{A} ergibt. Das Problem ist lediglich, daß \mathfrak{B} keine reguläre Matrix ist, da $\det \mathfrak{B} = 0$ womit nach Satz 39 (5) ($|\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}|$) gelten muß, daß auch das Produkt aus \mathfrak{B} und \mathfrak{A} nicht regulär sein kann. Allerdings hat eine nicht reguläre Matrix kein Inverses, womit es keine bestimmte Lösung für \mathfrak{X} gibt.

11.5

(a) Offenbar ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

invers zu sich selbst. Damit gilt nach Umformung:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

(Allgemein: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$)

Nun können wir jeweils die Zahlenwerte der Buchstabenkette **SIVNXBMHNOTE** einsetzen, und das Ausgangswort wie folgt berechnen (jeweils modulo 26):

$$\begin{array}{rcll}
a_1 & = & 4 \cdot 25 + 7 \cdot 17 & = 219 = 11 \Rightarrow \text{K} \\
a_2 & = & 9 \cdot 25 + 22 \cdot 17 & = 599 = 1 \Rightarrow \text{R} \\
\hline
a_3 & = & 4 \cdot 22 + 7 \cdot 13 & = 179 = 23 \Rightarrow \text{Y} \\
a_4 & = & 9 \cdot 22 + 22 \cdot 13 & = 484 = 16 \Rightarrow \text{P} \\
\hline
a_5 & = & 4 \cdot 8 + 7 \cdot 2 & = 46 = 20 \Rightarrow \text{T} \\
a_6 & = & 9 \cdot 8 + 22 \cdot 2 & = 116 = 12 \Rightarrow \text{O} \\
\hline
a_7 & = & 4 \cdot 14 + 7 \cdot 9 & = 119 = 15 \Rightarrow \text{L} \\
a_8 & = & 9 \cdot 14 + 22 \cdot 9 & = 324 = 12 \Rightarrow \text{O} \\
\hline
a_9 & = & 4 \cdot 13 + 7 \cdot 12 & = 136 = 6 \Rightarrow \text{G} \\
a_{10} & = & 9 \cdot 13 + 22 \cdot 12 & = 381 = 17 \Rightarrow \text{I} \\
\hline
a_{11} & = & 4 \cdot 20 + 7 \cdot 4 & = 108 = 4 \Rightarrow \text{E} \\
a_{12} & = & 9 \cdot 20 + 22 \cdot 4 & = 268 = 8 \Rightarrow \text{X}
\end{array}$$

(b) Nehmen wir die allgemeine Umformung aus (a):

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

so wird ersichtlich, daß für die Umkehroperation (also das Entschlüsseln) in jedem Falle eine inverse Matrix zu \mathfrak{A} existieren muß.

Die Frage ist nun, welche Kriterien sind für die Existenz einer inversen Matrix zu \mathfrak{A} wesentlich? Schon nach Definition muß \mathfrak{A} regulär sein. Allerdings dürfte dies nicht das einzige Kriterium sein. Da \mathbb{Z}_{26} allerdings mit den Operationen $+$ und \cdot kein Körper ist, sondern ein Ring, bei dem nicht für die Multiplikation zwangsweise ein inverses Element existieren muß, gestaltet dies die Suche nach inversen Matrizen etwas schwierig. Ich erachte das obige Beispiel als Sonderfall und denke nicht, daß jede invertierbare matrix unbedingt sich selbst als Inverses haben muß.

Ich habe zu diesem Zwecke ein Programm geschrieben, welches jegliche mögliche Matrix auf Inverse überprüft, da mir partout kein analytischer Weg einfallen wollte, eben dieses zu lösen. Also griff ich zum mächtigen Hammer namens Pascal (später zum noch mächtigeren Hammer mit dem einfallslosen Namen C, das allerdings nur aufgrund eigener Dämlichkeit) und machte mich daran, die etwas mehr als 456000 Matrizen überprüfen zu lassen. Wobei mit Hammer Pascal hier eine lange Liste jeglicher möglichen Matrix liefert, zusammen mit ihrer Determinante und der Information, ob sie in \mathbb{Z}_{26} invertierbar ist oder nicht (auf Anfrage gern digital erhältlich, aufgrund des schieren Umfangs von grob geschätzt wohl über 7500 gedruckten Seiten hier nicht beigelegt). Hammer C nahm sich diese Liste, schlug ein wenig darauf herum, um sie in handliche Brocken zu zerkleinern und spie mir alsbald für jede Determinante vor die Füße ob eine Matrix mit eben jener Determinante invertierbar ist oder nicht. Meine Vermutung, daß sich dies anhand der Determinante feststellen läßt, hatte sich bestätigt. Lösung folgt:

\mathfrak{A} ist invertierbar $\iff |\mathfrak{A}| \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$

11.6

Zunächst stellen wir die Matrizen auf.

Adjazenzmatrix:

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valenzmatrix:

$$\mathfrak{V} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Admittanzmatrix:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{V} - \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Adjunkte A_{ii} der Determinante $|\mathfrak{A}|$ berechnet sich dann folgendermaßen:

$$|\mathfrak{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{44}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

Ebenso erhalten wir die folgenden 5 zusammenhängenden, spannenden Teilgraphen von G :

