

10.1

Bedingung: $(R; +, \cdot)$ sei Boolescher Ring und damit Ring mit dem neutralen Element 0 bzgl. + und es gelte daß $(R \setminus \{0\}; \cdot)$ das Einselement 1 besitzt sowie $\forall x \in R : x \cdot x = x$.

Behauptung: $\forall x \in R : x + x = 0$

Beweis. Sei $x \in R$.

Da nach Definition eines Booleschen Ringes $\forall x \in R : x \cdot x = x$ gilt, können wir folgendes annehmen

$$(x + x) \cdot (x + x) = x + x$$

Damit gilt auch (nach Distributivität eines Ringes):

$$x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x = x + x$$

sowie nach Voraussetzung

$$x + x + x + x = x + x$$

Womit wir dann folgendes erhalten:

$$(x + x) + (x + x) - (x + x) = (x + x) - (x + x)$$

$$x + x = 0$$

□

Behauptung: $\forall x, y \in R : x \cdot y = y \cdot x$

Beweis. Seien $x, y \in R$.

Ansatz nach Voraussetzung wie oben, Ausnutzung von Distributivität und Zusammenfassung analog:

$$(x + y) \cdot (x + y) = x + y$$

$$x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y = x + y$$

$$x + x \cdot y + y \cdot x + y = x + y$$

Letzter Schritt:

$$x + x \cdot y + y \cdot x + y - (x + y) = x + y - (x + y)$$

$$x \cdot y + y \cdot x = 0$$

$$x \cdot y = -(y \cdot x)$$

Nach der soeben bewiesenen Behauptung, die man zu $x = -x$ umstellen kann, ist demzufolge $-(y \cdot x) = y \cdot x$. Folglich gilt:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

□

10.2

Bedingung: $(B; \wedge, \vee, \bar{}, 0, 1)$ sei Boolesche Algebra.

Behauptung: Eine Algebra der Form $(B; +, \cdot)$ läßt sich durch

$$\begin{aligned} a + b &:= (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b), \\ a \cdot b &:= a \wedge b \end{aligned}$$

definieren, die ein Boolescher Ring ist.

Beweis. $B \neq \emptyset$ nach Definition;

$+$ und \cdot sind innere Verknüpfungen auf B , da sie aus \wedge , \vee und $\bar{}$ zusammengesetzt sind, welches schon durch die Boolesche Algebra innere Verknüpfungen auf B sind.

Zu zeigen:

1. $(B; +)$ ist abelsche Gruppe.
2. $(B; \cdot)$ ist Halbgruppe.
3. Distributivität gilt.
4. $\forall x \in B : x \cdot x = x$ ($\forall x, y \in B : x + x = 0 \wedge x \cdot y = y \cdot x$ ergibt sich daraus; siehe oben).
5. Neutrales Element bezüglich $+$ ist 0 und $(B \setminus \{0\}; \cdot)$ besitzt das Einselement 1.

$+$ ist assoziativ und kommutativ, da $+$ nur mit \wedge und \vee definiert wurde, die beide sowohl assoziativ als auch kommutativ sind nach Definition der Booleschen Algebra.

Das neutrale Element bezüglich $+$ ist offenbar 0:

$$a + 0 = (\bar{a} \wedge 0) \vee (a \wedge \bar{0}) = 0 \vee (a \wedge 1)$$

$$a + 1 = a \wedge 1 = a$$

Das inverse Element zu a hingegen bezüglich $+$ ist offenbar \bar{a} :

$$a + \bar{a} = (a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$$

Damit ist $(B; +)$ eine abelsche Gruppe.

Weiterhin ist \cdot ebenfalls assoziativ und sogar kommutativ, da \wedge diese Eigenschaften ebenfalls besitzt.

Das neutrale Element bezüglich \cdot ist offenbar 1:

$$a \cdot 1 = a \wedge 1 = a$$

Damit ist $(B; \cdot)$ eine kommutative Halbgruppe.

Seien $x, y, z \in B$, so gelten die Assoziativgesetze:

$$(x + y) \cdot z = ((x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)) \wedge z = ((x \wedge \bar{y}) \wedge z) \vee ((\bar{x} \wedge y) \wedge z)$$

$$x \cdot (y + z) = x \wedge ((y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge z)) = (x \wedge (y \wedge \bar{z})) \vee (x \wedge (\bar{y} \wedge z))$$

Sowie die Distributivgesetze:

$$(x \cdot z) + (y \cdot z) = ((x \wedge z) \wedge \overline{y \wedge z}) \vee (\overline{x \wedge z} \wedge (y \wedge z)) = ((x \wedge z) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z})) \vee ((\bar{x} \vee \bar{z}) \wedge (y \wedge z))$$

$$(x \cdot z) + (y \cdot z) = ((x \wedge \bar{y}) \wedge z) \vee ((\bar{x} \wedge y) \wedge z)$$

$$(x \cdot y) + (x \cdot z) = ((x \wedge y) \wedge \overline{x \wedge z}) \vee (\overline{x \wedge y} \wedge (x \wedge z)) = ((x \wedge y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z})) \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \wedge z))$$

$$(x \cdot y) + (x \cdot z) = ((x \wedge \bar{z}) \wedge y) \vee ((\bar{y} \wedge x) \wedge z)$$

Weiterhin folgende Bedingungen für einen Booleschen Ring:

$$x \cdot x = x$$

$$x \wedge x = x$$

gilt offensichtlich.

$$x + x = 0$$

sowie

$$x \cdot y = y \cdot x$$

gelten ebenfalls, da sie sich aus $x \cdot x = x$ ergeben.

Damit ist $(B; +, \cdot)$ ein Boolescher Ring. □

10.3

(a)

$$s_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Inversionen:

$$(5, 3), (5, 2), (5, 1), (5, 4),$$

$$(6, 3), (6, 2), (6, 1), (6, 4),$$

$$(3, 2), (3, 1),$$

$$(2, 1)$$

Damit: $I(s_1) = 11$

(b)

$$s_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 3 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Inversionen:

$$(5, 3), (5, 2), (5, 4), (5, 1),$$

$$(8, 3), (8, 2), (8, 7), (8, 4), (8, 1), (8, 6),$$

$$(3, 2), (3, 1),$$

$$(2, 1),$$

$$(7, 4), (7, 1), (7, 6),$$

$$(4, 1)$$

Damit: $I(s_2) = 17$

10.4

$$\begin{aligned} 3 \cdot x - i \cdot y &= 3 + i \\ (1 + i) \cdot x + y &= -i \end{aligned}$$

Wir erhalten damit folgende Darstellung mit Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 3 & -i \\ (1 + i) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + i \\ -i \end{pmatrix}$$

Mit der Cramer'schen Regel lassen sich die Variablen folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{A_1}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 + i & -i \\ -i & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -i \\ 1 + i & 1 \end{vmatrix}} \\ x &= \frac{((3 + i) \cdot 1) - ((-i) \cdot (-i))}{(3 \cdot 1) - ((1 + i) \cdot (-i))} \\ x &= \frac{(3 + i) + 1}{3 - (1 - i)} = \frac{4 + i}{2 + i} \end{aligned}$$

Durch Erweiterung mit dem konjugiert komplexen Nenner erhalten wir letztendlich einen reellen Nenner

$$x = \frac{(4+i) \cdot (2-i)}{(2+i) \cdot (2-i)} = \frac{9-2 \cdot i}{5}$$

$$x = \frac{9}{5} - \frac{2}{5}i$$

Für y genau das gleiche Verfahren:

$$y = \frac{A_2}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3+i \\ 1+i & -i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -i \\ 1+i & 1 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{(3 \cdot (-i)) - ((1+i) \cdot (3+i))}{2+i}$$

$$y = \frac{-3 \cdot i - (2+4i)}{2+i} = \frac{-2-7 \cdot i}{2+i}$$

$$y = \frac{(-2-7 \cdot i) \cdot (2-i)}{(2+i) \cdot (2-i)} = \frac{-11-12 \cdot i}{5}$$

$$y = -\frac{11}{5} - \frac{12}{5}i$$

10.5

(a)

$$A := \begin{vmatrix} 10 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{nach} \\ \text{Regel von} \\ \text{Sarrus} \end{array} \right) = 10 \cdot 4 \cdot (-2) + 3 \cdot (-5) \cdot 7 - 3 \cdot (-1) \cdot (-2) - (-2) \cdot 4 \cdot 7$$

$$= -80 + (-105) - 6 - (-56) = -135$$

(b)

$$B := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(z_2 + z_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(z_3 - z_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$B = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(z_2 + 2 \cdot z_3)}{=} \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(z_1 - 6 \cdot z_3)}{=} \begin{vmatrix} 0 & -7 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$B = (-1)^4 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$B = ((-7) \cdot 3) - (6 \cdot (-1)) = -15$$

(c)

$$C := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{(z_2 + z_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C \stackrel{(z_5 - z_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{(z_3 - z_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -8 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{(z_2 + z_3)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{(z_4 - z_3)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -8 \end{vmatrix} \stackrel{(s_3 - 4 \cdot s_1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & -15 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -15 \end{vmatrix}$$

$$C = (-2) \cdot (2 \cdot (-15) - 2 \cdot (-5)) = 40$$

(d)

$$D := \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & \mathbf{0} \\ 8 & 9 & 13 & 5 & -6 & \mathbf{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D \stackrel{(z_3 - z_2)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 3 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 & 1 & -3 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_{(z_2 - z_3)} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{7} \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-21) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_{(z_1 + z_2)} = (-21) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-42) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D = (-42) \cdot (3 - 1) = -84$$

10.6

Die Determinante $A := |a_{i,j}|_n$ hat die folgende Form:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

d.h. wir haben auf der Nebendiagonale nur Einsen, ansonsten nur Nullen (aufgrund von Beschränkungen bei LaTeX bei Ellipsen dort eine horizontale solche, statt diagonal aufsteigend). Diese Determinante kann man natürlich sehr schön nach Zeilen oder Spalten entwickeln, Damit ist A entweder 1 oder -1 , je nach n .

Ist n gerade, so führt dies zu einem Faktor von -1 , ist n ungerade, zu einem Faktor von 1. Das passiert bei jeder Entwicklung, womit sich das Vorzeichen bei jeder zweiten solchen ändert.

Damit gilt folgendes:

$$A = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$