# 9.1

$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, s = s \square d^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, d^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$d^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, d^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, d^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$d^6 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, s \square d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, s \square d^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$s \square d^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, s \square d^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, s \square d^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$D_6 = \langle\{d, s\}\rangle = \{d, d^2, d^3, d^4, d^5, d^6, s \square d, s \square d^2, s \square d^3, s \square d^4, s \square d^5, s \square d^6\}$
$A := \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \mid a_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq 6\}$

Seien $g \in D_6$ und $\alpha := (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \in A$:
$g(\alpha) := (a_{g(1)}, a_{g(2)}, a_{g(3)}, a_{g(4)}, a_{g(5)}, a_{g(6)})$; $\quad \varphi_g := |\{a \in A \mid g(a) = a\}|$

$$t_6 = \frac{\sum_{g \in D_6} \varphi_g}{|D_6|} = \frac{\sum_{g \in D_6} \varphi_g}{12}$$

Sei $g = e \Rightarrow (a_1 = a_1) \wedge (a_2 = a_2) \wedge (a_3 = a_3) \wedge (a_4 = a_4) \wedge (a_5 = a_5) \wedge (a_6 = a_6)$

*(Permutation als einzelne Zuordnungen geschrieben)*

$\Rightarrow \varphi_e = 2^6 = 64$

Das können wir so einfach »festlegen«, da ja die Grundmenge für $a_1$ bis $a_6$ $\{0, 1\}$ mit der Kardinalität 2 ist. D. h. für die 6 ›fixen‹ Punkte von $g = e$ gibt es $2^6$ Möglichkeiten. Analog bei den nachfolgenden Permutationen.

Sei $g = d \Rightarrow (a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6)$
$\Rightarrow \varphi_d = 2^1 = \mathbf{2}$
Sei $g = d^2 \Rightarrow (a_5 = a_1 = a_3) \wedge (a_6 = a_2 = a_4)$
$\Rightarrow \varphi_{d^2} = 2^2 = \mathbf{4}$
Sei $g = d^3 \Rightarrow (a_4 = a_1) \wedge (a_5 = a_2) \wedge (a_6 = a_3)$
$\Rightarrow \varphi_{d^3} = 2^3 = \mathbf{8}$
Sei $g = d^4 \Rightarrow (a_3 = a_1 = a_5) \wedge (a_4 = a_2 = a_6)$
$\Rightarrow \varphi_{d^4} = \varphi_{d^2} = 2^2 = \mathbf{4}$
Sei $g = d^5 \Rightarrow (a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6)$
$\Rightarrow \varphi_{d^5} = \varphi_d = 2^1 = \mathbf{2}$

Sei $g = s \Rightarrow (a_1 = a_6) \wedge (a_2 = a_5) \wedge (a_3 = a_4)$
$\Rightarrow \varphi_s = 2^3 = \mathbf{8}$
Sei $g = s \square d \Rightarrow (a_1 = a_1) \wedge (a_2 = a_6) \wedge (a_3 = a_5) \wedge (a_4 = a_4)$
$\Rightarrow \varphi_{s \square d} = 2^4 = \mathbf{16}$
Sei $g = s \square d^2 \Rightarrow (a_1 = a_2) \wedge (a_3 = a_6) \wedge (a_4 = a_5)$
$\Rightarrow \varphi_{s \square d^2} = 2^3 = \mathbf{8}$
Sei $g = s \square d^3 \Rightarrow (a_1 = a_3) \wedge (a_2 = a_2) \wedge (a_4 = a_6) \wedge (a_5 = a_5)$
$\Rightarrow \varphi_{s \square d^3} = 2^4 = \mathbf{16}$
Sei $g = s \square d^4 \Rightarrow (a_1 = a_4) \wedge (a_2 = a_3) \wedge (a_5 = a_6)$
$\Rightarrow \varphi_{s \square d^4} = 2^3 = \mathbf{8}$
Sei $g = s \square d^5 \Rightarrow (a_1 = a_5) \wedge (a_2 = a_4) \wedge (a_3 = a_3) \wedge (a_6 = a_6)$
$\Rightarrow \varphi_{s \square d^5} = 2^4 = \mathbf{16}$

$$t_6 = \frac{\sum_{g \in D_6} \varphi_g}{12} = \frac{64+2+4+8+4+2+8+16+8+16+8+16}{12} = \frac{156}{12} = \underline{\underline{13}}$$

## 9.2

$z_1 = 1 - 2 \cdot i$
$z_2 = 3 + 5 \cdot i$

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) \cdot (z_1 - 3 \cdot z_2) &= ((1 - 2 \cdot i) + (3 + 5 \cdot i)) \cdot ((1 - 2 \cdot i) - 3 \cdot (3 + 5 \cdot i)) \\
&= (4 + 3 \cdot i) \cdot (-8 - 17 \cdot i) \\
&= ((-32) + 51) + ((-68) + (-24)) \cdot i \\
&= 19 - 92 \cdot i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2^{-1} &= (1 - 2i) \cdot \left(\tfrac{3}{34} - \tfrac{5}{34} i\right) \\
&= \left(\tfrac{3}{34} - \tfrac{10}{34}\right) + \left(-\tfrac{5}{34} - \tfrac{6}{34}\right) i \\
&= -\tfrac{7}{34} - \tfrac{11}{34} i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1^7 &= (1 - 2i)^7 \\
&= \left(\sqrt{5} \cdot (\cos(-1{,}1071) + i \cdot \sin(-1{,}1071))\right)^7 \\
&= \left(\sqrt{5}\right)^7 (\cos(-1{,}4669) + i \cdot \sin(-1{,}4669)) \\
&= 5^{\frac{7}{2}} \cdot (\cos(-1{,}4669) + i \cdot \sin(-1{,}4669)) \\
&= 29 - 278i
\end{aligned}$$

## 9.3

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und

$z_1 = a_1 + b_1 i \qquad \overline{z_1} = a_1 - b_1 i$
$z_2 = a_2 + b_2 i \qquad \overline{z_2} = a_2 - b_2 i$

Beh.: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i} \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2) i \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (-a_1 b_2 - b_1 a_2) i \\
&= (a_1 a_2 - (-b_1)(-b_2)) + (a_1 (-b_2) + (-b_1) a_2) i \\
&= (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) \\
&= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}
\end{aligned}$$

## 9.4

$$2 + \sqrt{3} \cdot i = \sqrt{7} \cdot (\cos(0{,}7137) + i \sin(0{,}7137))$$

$$-3 + 8 \cdot i = \sqrt{73} \cdot (\cos(1{,}9296) + i \sin(1{,}9296))$$

$$-3 - 9i = \sqrt{90} \cdot (\cos(-1{,}8925) + i \sin(-1{,}8925))$$

$$(1 + i)^{1000} = \left(\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{1000} = 2^{500} \cdot (\cos(250\pi) + i \sin(250\pi)) = 2^{500}$$

$$= 3273390607896141870013189696827599152216642046043064789483291368096133796404674554883270092325904157150886684127560071009217256545885393053328527589376$$

# 9.5

## (a)

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= 0 \\ z^2 + z &= -1 \\ (z + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} &= -1 \qquad\qquad \text{Subst.: } z' := z + \tfrac{1}{2} \\ (z')^2 &= -\tfrac{3}{4} \\ z'_1 &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} i \\ z'_2 &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2} i \\ z &= z' - \tfrac{1}{2} \\ z_1 &= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i \\ z_2 &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$

## (b)

$z^6 + 15625 = 0$
$z^6 = -15625$
$z = \sqrt[6]{-15625}$
$z = \sqrt[6]{15625(\cos\pi + i\sin\pi)}$
$z_1 = 5 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4{,}3301 + 2{,}5i$
$z_2 = 5 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 5i$
$z_3 = 5 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -4{,}3301 + 2{,}5i$
$z_4 = 5 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4{,}3301 - 2{,}5i$
$z_5 = 5 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -5i$
$z_6 = 5 \cdot \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -4{,}3301 - 2{,}5i$

# 9.6

**geg.:** $M \neq \emptyset$
**Beh.:** $(\mathfrak{P}(M); \Delta, \cap)$

**Beweis:**
Zu beweisende Aussagen:
(1) $\mathfrak{P}(M) \neq \emptyset$
(2) $\Delta$ und $\cap$ innere Verknüpfungen auf $\mathfrak{P}(M)$
(3) $(\mathfrak{P}(M); \Delta)$ ist abelsche Gruppe
(4) $(\mathfrak{P}(M); \cap)$ ist Halbgruppe
(5) (Distributivgesetze) $\forall\, x, y, z \in \mathfrak{P}(M)$:

$$x \cap (y \,\Delta\, z) = (x \cap y) \,\Delta\, (x \cap z)$$
$$(x \,\Delta\, y) \cap z = (x \cap z) \,\Delta\, (y \cap z)$$

## (1)

$\mathfrak{P}(M) \neq \emptyset$ klar, da $M \neq \emptyset$.

## (2)

$\Delta$ und $\cap$ sind innere Verknüpfungen auf $\mathfrak{P}(M)$, da selbige sämtliche möglichen Mengen der Elemente von $M$ enthält und damit die Ergebnisse von $\Delta$ und $\cap$ offenbar auch in $\mathfrak{P}(M)$ liegen.

### (3)

$(\mathfrak{P}(M); \Delta)$ ist abelsche Gruppe $\Leftrightarrow$ $(\mathfrak{P}(M); \Delta)$ Gruppe $\wedge$ $\Delta$ ist kommutativ.

- $\mathfrak{P}(M) \neq \emptyset$, s. (1)
- $\Delta$ innere Verknüpfung auf $\mathfrak{P}(M)$, s. (2)
- Assoziativität von $\Delta$ gilt, nach Satz 1.2.4(a) aus dem Buch.
- Einselement der Gruppe ist offenbar $\emptyset$
- Seien $x, x' \in \mathfrak{P}(M)$ und ist $x'$ das inverse Element zu $x$ bzgl. $\Delta$, so gilt offenbar: $x = x'$
- Kommutativität von $\Delta$ gilt, nach Satz 1.2.4(b) aus dem Buch.

### (4)

$(\mathfrak{P}(M); \cap)$ ist Halbgruppe $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{P}(M) \neq \emptyset \wedge \cap$ ist innere Verknüpfung auf $\mathfrak{P}(M) \wedge \cap$ assoziativ

- $\mathfrak{P}(M) \neq \emptyset$, s. (1)
- $\cap$ innere Verknüpfung auf $\mathfrak{P}(M)$, s. (2)
- Assoziativität von $\cap$ gilt, nach Satz 1.2.4(a) aus dem Buch.

### (5)

Distributivgesetze für $\Delta$ und $\cap$ gelten, nach Satz 1.2.4(c) aus dem Buch.

Damit ist $(\mathfrak{P}(M); \Delta, \cap)$ ein Ring. $\blacksquare$