8.1

$d := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $s := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$G := \langle\{d, s\}\rangle = \{e, d, d^2, d^3, s, s \square d, s \square d^2, s \square d^3\}$

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $d^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $d^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $s \square d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $s \square d^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $s \square d^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\square$	e	d	d^2	d^3	s	$s \square d$	$s \square d^2$	$s \square d^3$
e	e	d	d^2	d^3	s	$s \square d$	$s \square d^2$	$s \square d^3$
d	d	d^2	d^3	e	$s \square d^3$	s	$s \square d$	$s \square d^2$
d^2	d^2	d^3	e	d	$s \square d^2$	$s \square d^3$	s	$s \square d$
d^3	d^3	e	d	d^2	$s \square d$	$s \square d^2$	$s \square d^3$	s
s	s	$s \square d$	$s \square d^2$	$s \square d^3$	e	d	d^2	d^3
$s \square d$	$s \square d$	$s \square d^2$	$s \square d^3$	s	d^3	e	d	d^2
$s \square d^2$	$s \square d^2$	$s \square d^3$	s	$s \square d$	d^2	d^3	e	d
$s \square d^3$	$s \square d^3$	s	$s \square d$	$s \square d^2$	d	d^2	d^3	e

$\operatorname{ord} e = 1$ $\operatorname{ord} s = 2$
$\operatorname{ord} d = 3$ $\operatorname{ord} s \square d = 2$
$\operatorname{ord} d^2 = 2$ $\operatorname{ord} s \square d^2 = 2$
$\operatorname{ord} d^3 = 3$ $\operatorname{ord} s \square d^3 = 2$

Untergruppen von G mit der Ordnung 2 bzw. 4:

$\{e, d^2\}, \{e, s\}, \{e, s \square d\}, \{e, s \square d^2\}, \{e, s \square d^3\}, \{e, d, d^2, d^3\}, \{e, d^2, s, s \square d^2\}, \{e, d^2, s \square d, s \square d^3\}$

8.2

(a)

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

(+,+)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)
(0, 0)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)
(0, 1)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 0)
(0, 2)	(0, 2)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 2)	(1, 0)	(1, 1)
(1, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)
(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 0)
(1, 2)	(1, 2)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 2)	(0, 0)	(0, 1)

$\mathbb{Z}_6$

+	0	2	4	3	5	1
0	0	2	4	3	5	1
2	2	4	0	5	1	3
4	4	0	2	1	3	5
3	3	5	1	0	2	4
5	5	1	3	2	4	0
1	1	3	5	4	0	2

Hieraus ist ersichtlich, dass $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ und $\mathbb{Z}_6$ tatsächlich isomorph sind.

(b)

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

+	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 0)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(1, 0)
(1, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 0)	(0, 1)
(1, 1)	(1, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 0)

$\mathbb{Z}_4$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Angenommen, $\mathbb{Z}_4$ wäre isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, so muss es für jedes Element aus $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ eine Entsprechung in $\mathbb{Z}_4$ geben. Die Tabelle für $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ zeigt recht deutlich, dass (0, 0) das Einselement ist und damit, dass jedes Element zu sich selbst invers ist. Diese Eigenschaften müssten wir ja dann auch in $\mathbb{Z}_4$ wiederfinden. Ein kurzer Blick in die Tabelle für $\mathbb{Z}_4$ zeigt, dass zwar 0 das Einselement ist, womit wir eine Zuordnung schon gefunden hätten, aber dass die Elemente 1 und 3, die zum jeweils anderen das inverse Element bilden, definitiv nicht zu sich selbst invers sind.
Folglich ist $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ nicht zu $\mathbb{Z}_4$ isomorph. ■

8.3

$n = 600$

$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

$p_1 = 2; \quad k_1 = 3$
$p_2 = 3; \quad k_2 = 1$
$p_3 = 5; \quad k_3 = 2$

$Par(3) = \{(3), (1, 2), (1, 1, 1)\} \quad \rightarrow \quad |Par(3)| = 3$
$Par(1) = \{(1)\} \quad \rightarrow \quad |Par(1)| = 1$
$Par(2) = \{(2), (1, 1)\} \quad \rightarrow \quad |Par(2)| = 2$

Damit gibt es genau $3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$ verschiedene abelsche Gruppen mit 600 Elementen.

Kommen wir zu den Hilfsgruppen H_i. Ich habe im folgenden an den Index noch einen Buchstaben angehängt, um verschiedene Hilfsgruppen zu unterscheiden.

$H_{1a} = \mathbb{Z}_8$
$H_{1b} = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$
$H_{1c} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$H_2 = \mathbb{Z}_3$
$H_{3a} = \mathbb{Z}_{25}$
$H_{3b} = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

Dann erhalten wir folgende zueinander nicht isomorphen abelschen Gruppen:

$G_1 = H_{1a} \times H_2 \times H_{3a} \quad = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$
$G_2 = H_{1a} \times H_2 \times H_{3b} \quad = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5)$
$G_3 = H_{1b} \times H_2 \times H_{3a} \quad = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$
$G_4 = H_{1b} \times H_2 \times H_{3b} \quad = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3) \times \mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5)$
$G_5 = H_{1c} \times H_2 \times H_{3a} \quad = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$
$G_6 = H_{1c} \times H_2 \times H_{3b} \quad = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5)$

Aus offensichtlichen Gründen werde ich hier nicht alle Gruppen mit ihren jeweils 600 Elementen aufschreiben. Anhand der Aufgabenstellung erschien mir Klammersetzung bei den endgültigen Produkten ratsam, ob dies richtig ist, sei dahingestellt. Meiner Meinung nach macht es jedoch keinen

Unterschied für das endgültige Ergebnis (unbewiesene Behauptung). Da die Aufgabenstellung zu diesem Thema allerdings nicht Stellung bezieht und die zu erwartende Punktzahl nicht nahe legt, dass man diesen Beweis führen soll, werde ich eben dies auch nicht tun. Meine Vermutung hier wäre lediglich, dass zum Beispiel (1, 2, 3) und (1, (2, 3)) zwar verschiedene *Tupel* sind, dieser Unterschied allerdings für die Betrachtung der Isomorphie oder Unterschiedlichkeit der *Gruppen* keine Relevanz hat. Beweisen kann und werde ich das jedoch hier nicht.